

Mh 900 L. 204
ملخصات شوم

نظريات ومسائل
في

المصفوفات

تأليف
الدكتور فرانسيس آيرز

أستاذ سابق ، رئيس قسم الرياضيات
كلية ديكنسون

ترجمة
نخبة من الأساتذة المتخصصين

مراجعة
الدكتور فاروق البتانوني

قسم الرياضيات - جامعة المنصورة
جمهورية مصر العربية

دار ماكجرو هيل للنشر

الدار الدولية للنشر والتوزيع



حقوق النشر

الطبعة الأجنبية : حقوق التأليف © ١٩٦٢ ، ١٩٧٤ ، دار ماكجروهيل
للنشر ، انك . جميع الحقوق محفوظة .

الطبعة العربية الأولى : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٠ دار ماكجروهيل
للنشر ، انك . جميع الحقوق محفوظة .

الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٨ ، جميع الحقوق محفوظة .
الدار الدولية للنشر والتوزيع

ص.ب ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب

القاهرة - ج.م.ع

ت : ٢٤٣٤٩٠٨

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو
نقله على أى نحو أو بأى طريقة ، سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو
بالتسجيل أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقوماً .

مقدمة الناشر

المعرفة هى أصل الحضارة ،
والكلمة هى مصدر المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هى أهم مكون فى هذا المصدر .
وقد كانت الكلمة المطبوعة ولاتزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ،
حيث حملت إلباء حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاءة
الطريق بنور العلم والمعرفة .
والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم
توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .
وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنابات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم
يحظى القارئ العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية هو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .
والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها فى هذا المجال بتقديم الطبعات العربية للكتب
العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات
القارئ العربى استاذاً وباحثاً وممارساً .
ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية
للتعاون معنا فى إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية نخدم التقدم العلمى والحضارى
للقارئ العربى

والله ولى التوفيق

محمد وفائى كامل

مدير عام

الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساساً للحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحدياً بأن تطوع لفتحها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذي تخلفت عنه زمناً طويلاً .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة في جامعاتنا العربية لا زالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير في إعداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر McGraw-Hill Book Company نشاطها بالشروع في إصدار الطبعة العربية من سلسلة شوم Schaum Series التي لقيت في طبعتها الأصلية نجاحاً لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكن وراء سلسلة ملخصات شوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديداً جيداً ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية ، فيقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب شوم تصلح ككتب مدرسية ، أو مذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التقويم والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

مقدمة الطبعة الأجنبية

إن حساب المصفوفات أداة رياضية ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الكهرباء ، والكيمياء وعلم الاجتماع وعلم الاحصاء ، وهي أكثر ضرورة لدراسة الرياضيات البحتة . يعتبر هذا الكتاب الذى يعطى المواضيع الأساسية ، متما للكتب المستعملة ، ومرجعا من أجل أولئك الذين يحتاجون إلى معرفة طرق حساب المصفوفات واستعمالها . ومن جهة ثانية فإن الملخصات النظرية التى يحويها هذا الكتاب كافية لاستعماله كتابا لمقرر .

تقسم أبحاث هذا الكتاب إلى ستة وعشرين فصلا ، الأمر الذى لا يضر بالوضع المنطقي للموضوع ، بل يزيد من فائدة هذا الكتاب . وهذا ما يسمح للفصل بين دراسة المصفوفات الحقيقية - التى تهتم الكثيرين - عن المصفوفات ذات العناصر المركبة . يحوى كل فصل تذكرا بالتعاريف والنظريات والمبادئ . مع أمثلة متعددة ، ويتبع ما تقدم مسائل محلولة وعدد كبير من التمارين الإضافية .

إن الطالب الذى يتعرض لحساب المصفوفات يجد بسرعة أن حل التمارين العددية سهل جداً ، ولكن الصعوبة فى أن هذه الدراسة ، تكن فى التعاريف والنظريات وبراهينها . ومن الممكن أن يسبب نقص الخبرة الرياضية بعض المشاكل ، وهذا أمر طبيعي . لأنه كثيرا ما يكون على الطالب أن يحل تطبيقات عديدة لا تذكر مبادئها الأساسية ولا تبرهن نظرياتها إلا بعد حين . يؤدي هذا الكتاب على العكس بالقارى الذى يداوم على قراءة المذكرات والمسائل المتعلقة بكل فصل من فصوله . إلى جعله مطمئنا لفهم محتواه .

تتميز المسائل المحلولة عن الأمثلة التى توضح النظريات بتعدد أشكالها . وهى تحوى معظم البراهين الطويلة للنظريات الهامة ، كما تحوى البراهين القصيرة .

تطلب المسائل الإضافية من الطالب أن يجد بنفسه البرهان والحل وستكون هذه البراهين ، فى بعض الأحيان ، أشكالا أخرى البراهين أعطيت سابقا . ومع هذا فإن برهان بعض النظريات لا يتطلب أكثر من عدة أسطر - ويمكن خطأ اعتبار بعض المسائل بنائية - بينما يحتاج برهانها إلى كثير من المهارة والدقة .

لا يجوز أن تعالج أى واحدة من هذه المسائل بشئ من الاستخفاف لأن حساب المصفوفات ، بسبب كثرة نظريته ، يعتبر مقرا أساسيا للذين يرغبون التوصل إلى درجة جيدة من النضج الرياضى .

إن العدد الكبير من المسائل التى يحويها كل فصل من فصول هذا الكتاب ، يجعل حلها كلها ، قبل الانتقال إلى ما بعدها أمرا غير عملي . ومع ذلك فإنه من الضروري إعطاء اهتمام خاص للمسائل الإضافية التى يحويها الفصلان الأول والثانى من هذا الكتاب . وبعد أن يتمكن القارى من هذه المسائل فإنه سوف يشعر باطمئنان قوى عند متابعة دراسة هذا الكتاب .

يشكر المؤلف هيئة مؤسسة ستوم للنشر على تعاونهم الكبير .

فرانك إيرز

كارليل
أكتوبر ١٩٦٢

المحتويات

صفحة

١١-١

الفصل الأول : المصفوفات :

المصفوفات - المصفوفات المتساوية - جميع المصفوفات - ضرب المصفوفات الضرب بالتجزئة .

٢٢-١٢

الفصل الثاني : بعض أنماط من المصفوفات :

المصفوفة المثلثية - المصفوفة العددية - المصفوفة القطرية - مصفوفة الوحدة - معكوس مصفوفة - متقول مصفوفة - المصفوفات المتماثلة - المصفوفات المتخالفة - المصفوفات المرافقة - مصفوفات هيرميت مصفوفات هيرميت المتخالفة - المجموع المباشر .

٣٥-٢٣

الفصل الثالث : محددة مصفوفة مربعة :

المحددات من الدرجة الثانية والثالثة - خواص المحددات - المصفوفات والمعاملات المرافقة - المتتمات الجبرية .

٤٣-٣٦

الفصل الرابع : حساب المحددات :

الفك على طول صف أو عمود - مفكوك لابلاس - الفك على طول الصف الأول أو العمود الأول - محددة حاصل ضرب مصفوفتين - مشتقة محددة .

٥٤-٤٤

الفصل الخامس : التكافؤ :

رتبة مصفوفة - المصفوفة الشاذة وغير الشاذة - التحويلات الأولية - عكس تحويل أولى - المصفوفة المتكافئة - الشكل القانوني الصفى - الشكل النظامى - المصفوفات الأولية - المجموعة القانونية بالنسبة للتكافؤ - رتبة حاصل ضرب

٦١-٥٥

الفصل السادس : المصفوفة المرافقة لمصفوفة مربعة :

المرافق - المرافق حاصل الضرب - مصفر المرافق .

٧١-٦٢

الفصل السابع : معكوس مصفوفة :

معكوس مصفوفة قطرية - المعكوس باستخدام المصفوفة المرافقة - المعكوس باستخدام المصفوفات الأولية المعكوس بالتجزئة - معكوس المصفوفات المتماثلة - المعكوس من اليمين ومن اليسار لمصفوفة درجتها $M \times n$

٧٤-٧٢

الفصل الثامن : الحقول :

الحقول العددية - الحقول بصورة عامة - الحقول الجزئى - المصفوفات على حقل .

٨٢-٧٥

الفصل التاسع : الارتباط الخطى للمتجهات والصيغ :

المتجهات - الارتباط الخطى للمتجهات - الصيغ الخطية - كثيرات الحدود والمصفوفات .

٩٤-٨٣

الفصل العاشر : المعادلات الخطية :

مجموعة المعادلات غير المتجانسة - الحل باستعمال المصفوفات - قاعدة كرامر - مجموعة المعادلات المتجانسة .

الفصل الحادى عشر : الفراغات الاتجاهية :

الفراغات الاتجاهية - الفراغات الجزئية - الأساس والبعد - مجموع الفراغات - تقاطع الفراغات - الفراغ الصفرى للمصفوفة - قانون سلفستر للانعدامية - الأساس والاحداثيات .

الفصل الثانى عشر : التحويلات الخطية :

التحويلات الشاذة وغير الشاذة - تغيير الأساس - الفراغ اللامتغير - مصفوفة التبديل .

الفصل الثالث عشر : المتجهات على حقل الحقيقى :

حاصل الضرب الداخلى - الطول - متباينة شوارز - المتباينة المثلثية - المتجهات والفراغات المتعامدة - الأساس العيارى المتعامد - طريقة جرام سميت للتعامد - مصفوفة جرام - المصفوفات المتعامدة - التحويلات المتعامدة - حاصل الضرب الاتجاهى .

الفصل الرابع عشر : المتجهات على حقل الأعداد المركبة :

الأعداد المركبة - حاصل الضرب الداخلى - الطول - متباينة شوارز - المتباينة المثلثية - المتجهات والفراغات المتعامدة - الأساس العيارى المتعامد - طريق جرام سميت للتعامد - مصفوفة جرام - المصفوفات الواحدة - التحويلات الواحدة .

الفصل الخامس عشر : التطابق :

المصفوفات المتطابقة - المصفوفات المتماثلة المتطابقة - الشكل القانونى لمصفوفة حقيقية - لمصفوفة متماثلة تخالفية - لمصفوفة هرميتية - لمصفوفة هرميتية تخالفية بالنسبة للتطابق .

الفصل السادس عشر : الصيغ ثنائية الخطية :

مصفوفة الصيغة - التحويلات - الشكل القانونى - التحويلات موافقة التغير - التحويلات مخالفة التغير - تحليل الأشكال .

الفصل السابع عشر : الأشكال الصيغ التربيعية :

مصفوفة الشكل الصيغ - التحويلات - الأشكال القانونية - طريقة لا جرانج فى الاختزال - قانون القصور سلفستر - الأشكال المحددة وشبه المحددة - المصفورات الرئيسية - الأشكال المنتظمة - طريقة كروفكر فى الاختزال - تحليل الأشكال لعوامل .

الفصل الثامن عشر : الأشكال الهرميتية :

مصفوفة الشكل - التحويلات - الأشكال القانونية - الأشكال المحددة وشبه المحددة .

الفصل التاسع عشر : المعادلة المميزة لمصفوفة :

المعادلة المميزة والقيم الخاصة - المتجهات والفراغات اللامتغيرة .

الفصل العشرون : التشابه :

المصفوفات المتشابهة - اختزال لصيغ مثلثين - المصفوفات التى تقبل أن تكون قطرية .

١٩٣-١٨٢

الفصل الحادى والعشرون : المصفوفات المشابهة لمصفوفة قطرية :

المصفوفات المتماثلة الحقيقية - التشابه التعامدى - أزواج الأشكال التربيعية الحقيقية - المصفوفات الهرميتية - التشابه الواحدى - المصفوفات النظامية - التحليل الطيفى - حقل القيم .

٢٠١-١٩٤

الفصل الثانى والعشرون : كثيرات الحدود على حقل :

جمع وضرب وخارج قسمة كثيرات الحدود - نظرية الباقي - القاسم المشترك الأعظم - المضاعف المشترك لأصغر - كثيرات الحدود الأولية نسبيا - التحليل الوحيد .

٢١٢-٢٠٢

الفصل الثالث والعشرون : مصفوفات لا مبدا :

مصفوفة λ أو كثير حدود مصفوفى - المحموم وحاصل الضرب وخارج القسمة - نظرية الباقي - نظرية كايلى - هاملتون - تفاضل مصفوفة .

٢٢٢-٢١٣

الفصل الرابع والعشرون : شكل سميث النظامى :

شكل سميث النظامى - العوامل اللامتغيرة - القواسم الأولية .

٢٣١-٢٢٢

الفصل الخامس والعشرون : كثير الحدود الأدنى لمصفوفة :

اللامتغيرات التشابهية - كثير الحدود الأدنى - المصفوفة المتردية وغير المتردية - المصفوفة الرفيعة .

٢٤٦-٢٣٢

الفصل السادس والعشرون : الأشكال القانونية بالنسبة للتشابه :

الشكل القانونى الجذرى - شكل قانونى ثان - المصفوفات فوق الرفيعة شكل جاكوبى القانونى - الشكل القانونى الكلاسيكى - الاختزال إلى الشكل القانونى الجذرى .

٢٥٢-٢٤٧

قائمة بالمصطلحات

٢٥٨-٢٥٣

فهرس ثبت المصطلحات

الفصل الأول

المصفوفات

تسمى مجموعة الأعداد المرتبة على شكل مستطيل والموضوعة داخل قوسين مثل

$$(أ) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

والتي تخضع لقواعد معينة لعمليات سبيلها فيما بعد مصفوفة . المصفوفة . (أ) يمكن اعتبارها كصفوفة المعاملات لمجموعة

المعادلات المتجانسة : $\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$ أو كصفوفة ممددة لمجموعة المعادلات الخطية غير المتجانسة :

نرى فيما بعد كيف يمكن استعمال المصفوفات لحل هذه المجموعات ، ومن الممكن إعطاء تفسير مشابه للمصفوفة (ب) بأن نعتبر صفوفها ممثلة لاحداثيات النقاط (1,3,1) ، (2,1,4) ، و (4,7,6) في الفراغ العادي . سنستعمل أيضا فيما بعد المصفوفات ، لكي نبرهن على أن ثلاث نقاط واقعة أو غير واقعة في مستوى واحد مع نقطة الأصل أو على أنها واقعة أو غير واقعة على استقامة واحدة مع نقطة الأصل .

تسمى الأعداد أو الدوال a_{ij} الواردة في المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

عناصر المصفوفة ، حيث يعنى الدليل الأول في العنصر a_{ij} رقم الصف ويعنى الدليل الثاني رقم العمود الذى يقع فيه العنصر ، وبذا سيحمل كل عنصر من الصف الثانى العدد 2 كدليل أول كما يحمل كل عنصر من العمود الخامس الرقم 5 كدليل ثان . توصف كل مصفوفة ذات m صف و n عمودا بأنها من درجة $m \times n$ ويقرأ ذلك : من درجة $(m \text{ في } n)$ (نستعمل في بعض الأحيان للدلالة على مصفوفة القوسين () أو الزوجين من القطع المستقيمة $\|$ ولكننا سنستعمل القوسين في كل مكان من هذا الكتاب) .

نذكر في بعض الأحيان المصفوفة (1.1) بقولنا المصفوفة $[a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ أو المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ ، وعندما تكون الدرجة مقرر ومعرفة سنكتب بشكل مختصر « المصفوفة A » .

المصفوفات المربعة : إذا كانت $m=n$ فإن (1.1) يكون مربعا ويمكن عندئذ تسميته مصفوفة مربعة من درجة n أو مصفوفة مربعة n .

في مصفوفة مربعة نسمى العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ عناصر قطرية ، ونسمى حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A ، أثر المصفوفة .

المصفوفات المتساوية : نقول إن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ متساويتان فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط)

هاتان المصفوفتان من درجة واحدة وكان كل عنصر من إحداها مساويا للعنصر المقابل له من الثانية أى إذا كان وإذا كان فقط .

$$a_{ij} = b_{ij} , \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

أى : تكون مصفوفتين متساويتين فيما إذا كانت وإذا كانت فقط إحداها نسخة من الثانية .

المصفوفات الصفرية : تسمى المصفوفة ، التى كل عنصر فيها صفر ، المصفوفة الصفرية وعندما تكون المصفوفة صفرا ولا يكون هناك التباس فى درجتها ، فإننا نكتب $A = O$ ، بدلا من أن نكتب الجدول $m \times n$ حيث كل عنصر فيه صفر .

مجموع مصفوفتين : إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من الدرجة $m \times n$ فإن مجموعهما (حاصل طرحهما) $A \pm B$ يعرف بالمصفوفة $C = [c_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ حيث كل عنصر من C هو مجموع (حاصل طرح) العنصرين المقابلين من المصفوفتين A و B وبذا يكون : $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

$$\text{مثال ١ : إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ فإنه يكون}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و}$$

إذا كانت مصفوفتين من درجة واحدة فإننا نقول عنهما متوافقتين للجمع والطرح . لا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين من درجتين

مختلفتين . مثال ذلك : المصفوفتان (١) و (ب) غير متوافقتين للجمع والطرح .

إن جمع k مصفوفة مثل المصفوفة A هى مصفوفة من الدرجة نفسها ، وكل عنصر فيها ينتج عن تكرار العنصر المقابل

من A k مرة .

نعرف : إذا كان k مقدارا عدديا (يسمى k مقدارا عدديا لتمييزه عن الشكل $[k]$ الذى هو مصفوفة من الدرجة 1×1)

فإن $kA = A$ تعنى المصفوفة التى تنتج عن A بضرب كل عنصر من عناصرها فى k .

$$\text{مثال ٢ : إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ فإن :}$$

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A \cdot 3$$

$$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix} \text{ و}$$

ونسى ، بصورة خاصة ، المصفوفة $-A$ سالب A . ونحصل على هذه المصفوفة بضرب كل عنصر من A فى -1 أو ،

بشكل أبسط ، بتغيير إشارة كل عنصر من عناصرها . لكل مصفوفة A نجد $A + (-A) = O$ حيث O يعنى المصفوفة الصفرية ذات الدرجة المساوية لدرجة A .

إذا كانت المصفوفات A, B, C متوافقة بالنسبة للجمع فإنه يكون :

$$(١) \quad A + B = B + A \quad (\text{قانون التبديل})$$

$$(ب) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{قانون جمع الحدود الجبرية})$$

(ج) $(A+B) = kA + kB = (A+B)k$ حيث k مقدار عددي .

(د) توجد مصفوفة D بحيث يكون $A+D = B$.

هذه القوانين تنتج من قوانين الجبر الابتدائي التي تحكم جمع الأعداد وجمع كثيرات الحدود . كما وأن هذه القوانين تبين .

I - أن خواص جمع المصفوفات المتوافقة متفقة مع خواص جمع عناصر هذه المصفوفات .

الضرب : بحاصل الضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1m}]$ التي درجتها $1 \times m$

$$C = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{والمصفوفة}$$

التي درجتها 1×1

$$[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} \right] \quad \text{أى}$$

يجب ملاحظة أن هذه العملية هي صف في عمود : يضرب كل عنصر من الصف بالعنصر المقابل له من العمود وتجمع حواصل الضرب .

$$\text{مثال ٣ : } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 3(-1) + 4(2)] = [7] \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6 - 6 + 12] = 0 \quad (\text{ب})$$

بحاصل الضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ التي درجتها $m \times p$ والمصفوفة $B = [b_{ij}]$ التي درجتها $p \times n$ يقصد المصفوفة $C = [c_{ij}]$ التي درجتها $m \times n$ حيث

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

حيث A مكونة من m صفًا و B مكونة من n عمودًا . لتكوين $C = AB$ فإن كل صف من A يضرب مرة ومرة واحدة فقط في كل عمود من أعمدة B . إن العنصر c_{ij} من C هو حاصل ضرب الصف ذي الرقم i من A بالعمود ذي الرقم j من B .

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٤ :}$$

نقول إن حاصل الضرب AB معرف أو إن A موافقة لـ B بالنسبة للضرب إذا كان (وإذا كان فقط) عدد أعمدة A مساويا لعدد صفوف B وإذا كان A موافقا لـ B بالنسبة للضرب (AB معرف) فإنه ليس من الضروري أن يكون B موافقا لـ A بالنسبة للضرب ، (إن BA يمكن أن يكون أو لا يكون معرفا) .

أنظر المسألتين ٣ و ٤

إذا فرضنا أن A, B, C متوافقة بالنسبة للجمع والضرب كما هي واردة أدناه ، فإنه يكون :

$$(أ) \quad A(B+C) = AB + AC \quad \text{قانون التوزيع الأول .}$$

$$(و) \quad (A+B)C = AC + BC \quad \text{قانون التوزيع الثاني .}$$

$$(ز) \quad A(BC) = (AB)C \quad \text{قانون التنسيق (قانون ترتيب الحدود) .}$$

وهكذا نجد أنه :

$$(ح) \quad AB \neq BA \quad \text{بصورة عامة .}$$

$$(ط) \quad AB = O \quad \text{لا يستلزم بالضرورة أن يكون } A = O \quad \text{أو } B = O .$$

$$(ي) \quad AB = AC \quad \text{لا يستلزم بالضرورة أن يكون } B = C .$$

أنظر المسائل ٣ - ٨

الضرب بالتجزئة : لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times p$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $p \times n$. عند تكوين حاصل الضرب AB ، تقسم المصفوفة A في الواقع إلى m مصفوفة من الدرجة $1 \times p$ ، أما المصفوفة B فإنها تقسم إلى n مصفوفة من الدرجة $p \times 1$. إن هناك تقسيمات أخرى يمكن استعمالها ، فلنجزئ مثلا كلا من A و B إلى مصفوفات أخرى ذات درجات محددة على الجدول ، وذلك برسم مستقيمتين من الشكل :

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array} \right]$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array} \right] \quad \text{أو}$$

في كل تجزئة يجب أن تجزأ أعمدة A و صفوف B بشكل واحد ، ومن جهة أخرى يمكن أن تكون الأعداد m_1, m_2, n_1, n_2 أي أعداد صحيحة غير سالبة (محتوية الصفر) ويكون $m_1 + m_2 = m$ و $n_1 + n_2 = n$ ويكون عندئذ :

$$AB = \left[\begin{array}{cc} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{array} \right] = C$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٥ : احسب } AB \text{ إذا علمت أن}$$

لنجر التجزئة التالية :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right], \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ف نجد

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

انظر أيضا المسألة ٩ .

لتكن A, B, C, \dots مصفوفات مربعة من الدرجة n ولنجزئ A إلى مصفوفات كما هو مبين فيما يلي ومن الدرجات الموضحة أدناه :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \dots & (p_1 \times p_s) \\ \hline (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \dots & (p_2 \times p_s) \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \dots & (p_s \times p_s) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

ولنفرض أن المصفوفات B, C, \dots قد جُزئت بالطريقة السابقة نفسها . يمكن عندها ، لإجراء جمع وطرح وضرب

المصفوفات الاستمارة بالمصفوفات $A_{11}, A_{12}, \dots; B_{11}, B_{12}, \dots; C_{11}, C_{12}, \dots$

مسائل محلولة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2 \\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3 \\ 2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{أ - ١}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2 \\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3 \\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب -}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ج -}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{د -}$$

٢ - إذا كان $A + B - D = 0$. بحيث يكون $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

إذا كان $A + B - D = \begin{bmatrix} 1-3-p & 2-2-q \\ 3+1-r & 4-5-s \\ 5+4-t & 6+3-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-p & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $-2-p = 0$

و $p = -2, 4-r = 0$

فإن $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = A + B$ ، و $r = 4, \dots$

3. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(2) + 5(3) + 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}$ - أ

ب - $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(5) & 2(6) \\ 3(4) & 3(5) & 3(6) \\ -1(4) & -1(5) & -1(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

ج - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4) + 2(0) + 3(5) & 1(-6) + 2(-7) + 3(8) & 1(9) + 2(10) + 3(-11) & 1(6) + 2(7) + 3(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

د - $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) + 4(3) \\ 1(1) + 5(2) + 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$

هـ - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

٤ - إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، فإن

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ، و $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

يمكن للقارئ أن يبرهن أن $A^3 = A \cdot A^2$ ، و $A^2 \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2$.

٥ - برهن أن

أ - $\sum_{k=1}^2 a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^2 a_{ik} c_{kj}$

ب - $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ij}$

ج - (c) $\sum_{k=1}^2 a_{ik} \left(\sum_{h=1}^3 b_{kh} c_{hj} \right) = \sum_{h=1}^3 \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}$

$\sum_{k=1}^2 a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j})$
 $= \sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^2 a_{ik} c_{kj}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} &= \sum_{i=1}^2 (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\ &= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) \quad \text{ب -} \\ &= \sum_{i=1}^2 a_{i1} + \sum_{i=1}^2 a_{i2} + \sum_{i=1}^2 a_{i3} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ij}. \end{aligned}$$

إن هذا يبين ببساطة ، أنه لإيجاد مجموع كل عناصر مصفوفة يمكن للمرء أن يجمع أولا عناصر كل صف أو عناصر كل عمود .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 a_{ik} \left(\sum_{h=1}^3 b_{kh} c_{hj} \right) &= \sum_{k=1}^2 a_{ik} (b_{k1} c_{1j} + b_{k2} c_{2j} + b_{k3} c_{3j}) \quad \text{ج -} \\ &= a_{i1} (b_{11} c_{1j} + b_{12} c_{2j} + b_{13} c_{3j}) + a_{i2} (b_{21} c_{1j} + b_{22} c_{2j} + b_{23} c_{3j}) \\ &= (a_{i1} b_{11} + a_{i2} b_{21}) c_{1j} + (a_{i1} b_{12} + a_{i2} b_{22}) c_{2j} + (a_{i1} b_{13} + a_{i2} b_{23}) c_{3j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{k1} \right) c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{k2} \right) c_{2j} + \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{k3} \right) c_{3j} \\ &= \sum_{h=1}^3 \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}. \end{aligned}$$

٦ - برهن أنه إذا كان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ وكان كل من $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$

$$\text{فإن } A(B+C) = AB + AC$$

إن عناصر الصف ذي الرقم i من A هي $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ وعناصر العمود ذي الرقم j من $(B+C)$ هي

$$b_{1j} + c_{1j}, b_{2j} + c_{2j}, \dots, b_{nj} + c_{nj}.$$

إن $A(B+C)$ هو

$$\begin{aligned} a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \dots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}, \\ \text{وهو مجموع الحدين الواقعين في الصف ذي الرقم } i \text{ والعمود ذي الرقم } j \text{ في } AB \text{ و } AC \end{aligned}$$

٧ - برهن أنه إذا كان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ و $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $p \times q$

$$\text{فإن } A(BC) = (AB)C$$

إن عناصر الصف ذي الرقم i من A هي $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ وعناصر العمود ذي الرقم j من BC هي :

$$\sum_{h=1}^p b_{1h} c_{hj}, \sum_{h=1}^p b_{2h} c_{hj}, \dots, \sum_{h=1}^p b_{nh} c_{hj};$$

الرقم j من $A(BC)$ هو :

$$\begin{aligned} a_{i1} \sum_{h=1}^p b_{1h} c_{hj} + a_{i2} \sum_{h=1}^p b_{2h} c_{hj} + \dots + a_{in} \sum_{h=1}^p b_{nh} c_{hj} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{h=1}^p b_{kh} c_{hj} \right) \\ &= \sum_{h=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k1} \right) c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k2} \right) c_{2j} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kp} \right) c_{pj} \end{aligned}$$

وهذا هو العنصر الواقعي في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من $(AB)C$ ؛ أي $A(BC) = (AB)C$

٨ - نفرض أن A, B, C, D مصفوفات متوافقة فيما بينها بالنسبة للجمع والضرب ، برهن بطريقتين مختلفتين أن :

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

بالاستفادة من العلاقة (٥) ثم من العلاقة (و) نجد :

$$(A+B)(C+D) = (A+B)C + (A+B)D = AC + BC + AD + BD.$$

أما إذا استعنا بالعلاقة (و) و ثم ب (هـ) فإننا نجد :

$$(A+B)(C+D) = A(C+D) + B(C+D) = AC + AD + BC + BD \\ = AC + BC + AD + BD.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [3 \ 1 \ 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [1] \cdot [8 \ 7] & [1] \cdot [6 \ 5 \ 4] & [1] \cdot [1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 10 & 13 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 31 & 33 \\ 20 & 22 \\ 13 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 & 37 & 39 \\ 24 & 26 & 28 \\ 13 & 13 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 \\ 30 \\ 13 \end{bmatrix} \\ [8 \ 7] [6 \ 5 \ 4] [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 \\ 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 \\ 20 & 22 & 24 & 26 & 28 & 30 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \end{cases} \text{ ثلاث صيغ خطية في } y_1 \text{ و } y_2 \text{ ، ولنفرض أن } \begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{cases} \text{ ١٠ - لنفرض أن}$$

هو تحويل خطي من الأحاديث (y_1 و y_2) إلى الأحاديث (z_1 و z_2) . إذا طبقنا هذا التحويل على الصيغ الخطية المعطاة فإننا نحصل على مجموعة الصيغ .

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2 \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2 \\ x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})z_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ وإذا استعملنا رموز المصفوفات فإن الصيغ الثلاث تصبح}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

، أما ناتج تطبيق هذا التحويل فيعطى الصيغ الثلاث .

وكذلك فإن التحويل يكون

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

وهكذا إذا خضعت مجموعة من m من الصور الخطية في n متغير مصفوفتها A لتحويل خطي للمتغيرات مصفوفته B فإنه ينتج مجموعة من m من الصور الخطية مصفوفتها $C = AB$

مسائل اضافية

$$11 - \text{إذا أعطيت, } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$1 - \text{فاحسب } A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ب- واحسب

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, 0 \cdot B = 0$$

$$A + (B - C) = (A + B) - C. \quad \text{ج- وحقق}$$

د- أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A + D = B$ وتحقق من أن $A - B = - (B - A)$

$$12 - \text{إذا أعطيت } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ و } A \cdot B = 0 \text{ تحقق من أن } BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

تحقق بعد ذلك من أن $BA \neq AB$ بصورة عامة.

$$13 - \text{وإذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

برهن أن $AB = AC$ وأن كون $AB = AC$ لا يستلزم بالضرورة أن يكون $B = C$

$$14 - \text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ برهن أن } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

١٥ - استعمل مصفوفات المسألة ١١ وتحقق من أن $A(B + C) = AB + AC$ وأن $(A + B)C = AC + BC$

١٦ - فسر بصورة عامة لماذا $(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2$ و $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$

$$17 - \text{إذا أعطيت } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

١ - برهن أن $AB = BA = 0, AC = A, CA = C.$

ب - استند من نتائج (١) وبرهن أن $ACB = CBA, A^2 - B^2 = (A - B)(A + B), (A \pm B)^2 = A^2 + B^2.$

١٨ - إذا فرض $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ حيث $i^2 = -1$ ، فاستنتج صيغة تعطي القوى الصحيحة الموجبة لـ A .

الجواب : $A^n = I, A, -I, -A$ بحسب ما يكون، $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$ حيث $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

١٩ - برهن أن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من مجموعة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

هو مصفوفة من هذه المجموعة .

٢٠ - إذا أعطيت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times p$ والمصفوفة C من الدرجة $r \times q$ فما هي الشروط التي يجب أن تحققها الأعداد p و q و r لكي تكون حواصل الضرب موجودة . ما هي درجة كل من مصفوفات حواصل الضرب .

$$A(B+C)? \quad - \quad \text{ج} \quad ACB, \quad - \quad \text{ب} \quad \overline{ABC}, \quad - \quad \text{ا}$$

$$r = n, p = q; m \times q \quad - \quad \text{ج} \quad r = n = q; m \times p \quad - \quad \text{ب} \quad p = r; m \times q \quad - \quad \text{ا} \quad \text{الجواب ا}$$

٢١ - احسب AB إذا علمت :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ج} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad : (ا)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ج} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad : (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ج} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad : (ج)$$

٢٢ - برهن أن (ا) أثر $(A+B) =$ أثر $A +$ أثر B (ب) أثر $(kA) = k$ أثر A

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{فحقق أن} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases} \quad \text{٢٣ - إذا كان}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{bmatrix}$$

٢٤ - ليكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ وإذا كان $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ برهن أن $(A+B)C = AC + BC$

٢٥ - إذا كان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, n)$:

وإذا رمزنا بالرمز β_i لمجموع عناصر الصف ذي الرقم i من B أى $\beta_j = \sum_{k=1}^n b_{jk}$. فبرهن أن المنصر الواقع

في الصف ذي الرقم i من حاصل الضرب $A \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$ هو مجموع عناصر الصف ذي الرقم i من حاصل الضرب AB .

استخدم هذه الطريقة لحساب حواصل الضرب الوارد في المسألتين ١٢ ، ١٣ .

٢٦ - تسمى العلاقة (مثل التوازي المتطابق) بين عناصر رياضية علاقة تكافؤ فيما إذا حققت الخواص التالية :

- (أ) التحديد : إما أن يكون a يحقق العلاقة مع b وإما أن يكون a غير يحقق لهذه العلاقة مع b .
 - (ب) الانعكاس : a يحقق العلاقة مع a لكل a .
 - (ج) التماسك : إذا كان a يحقق العلاقة مع b فإن b يحقق هذه العلاقة مع a .
 - (د) التمدد : إذا كان a يحقق العلاقة مع b وكان b يحقق هذه العلاقة مع c فإن a يحقق هذه العلاقة نفسها مع c .
- برهن أن توازي المستقيمتين وتشابه المثلثات وتساوي المصفوفات هي علاقات تكافؤ .
- برهن أن تمامد المستقيمتين ليس علاقة تكافؤ .

٢٧ - برهن أن علاقة التوافق بالنسبة لجمع المصفوفات هي علاقة تكافؤ ، بينما علاقة التوافق بالنسبة لضرب المصفوفات ليست علاقة تكافؤ .

٢٨ - برهن أنه إذا كانت A, B, C ثلاث مصفوفات تحقق العلاقات $AC = CA$ و $BC = CB$.

* فإن : $(AB \pm BA)C = C(AB \pm BA)$

الفصل الثاني

بعض أنماط من المصفوفات

مصفوفة الوحدة (المحايدة) :

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان $a_{ij} = 0$ لقيم $i > j$ فإنها تسمى مصفوفة مثلثية عليا وإذا كانت $a_{ij} = 0$ لقيم $i < j$ فإنها تدعى مصفوفة مثلثية دنيا . وعلى ذلك :

مصفوفة مثلثية عليا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية دنيا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} , \text{ المصفوفة}$$

والتي هي مثلثية عليا ومثلثية دنيا تسمى مصفوفة قطرية .

كثيرا ما تكتب هذه المصفوفة بالشكل :

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$$

أنظر المسألة ١

إذا كان في المصفوفة القطرية D $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$ فإنها تدعى مصفوفة عددية وبالإضافة إلى ذلك إذا كان

$k = 1$ فإن هذه المصفوفة تدعى مصفوفة الوحدة (المحايدة) . ويرمز لها بالرمز I_n مثال ذلك

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت درجة المصفوفة واضحة أو غير هامة فإننا نرمز لمصفوفة الوحدة بالرمز I . من الواضح أن مجموع p من

المصفوفات I_n يحقق

$$I^p = I.I \dots = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

إن لمصفوفة الوحدة خواص مطابقة لبعض خواص الواحد كعدد صحيح . مثال ذلك إذا كان

$$I_2 . A = A . I_3 = I_2 A I_3 = A \text{ فإن } , \text{ ويمكن للقارئ أن يحقق ذلك بسهولة .}$$

مصفوفات مربعة خاصة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين وحققنا العلاقة $AB = BA$ فإننا نسمي هاتين المصفوفتين تبديليتين أو قابليتين للتبديل . ومن السهل أن نبرهن على أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإنها تبديلية مع نفسها ومع المصفوفة I_n .

أنظر المسألة ٢

إذا حققت المصفوفات A و B العلاقة $AB = -BA$ قلنا إنهما تبديليتان عكسيا .

إذا حققت المصفوفة A العلاقة $A^{k+1} = A$ حيث k عدد صحيح موجب ، قلنا إن هذه المصفوفة دورية .

وإذا كان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^{k+1} = A$ قلنا إن دورة A هي k .

إذا كان $k = 1$ أى إذا كان $A^2 = A$ فإننا نقول عن A إنها متساوية القوى .

أنظر المسائلين ٣-٤

تسمى المصفوفة A التى تحقق العلاقة $A^p = 0$ حيث p عدد صحيح موجب بالمصفوفة معدومة القوى . وإذا كان p أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^p = 0$ قلنا إن A مصفوفة معدومة القوى من الدليل p .

أنظر المسائلين ٥ و ٦

معكوس مصفوفة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين بحيث يكون $AB = BA = I$ فإن B تدعى معكوس A ونكتب $B = A^{-1}$ (B تساوى معكوس A) . إن المصفوفة B يكون لها ، أيضا ، معكوس هو المصفوفة A ويمكننا أن نكتب $A = B^{-1}$.

مثال ١ : بما أن $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ فإن كل مصفوفة في حاصل الضرب هي معكوس الأخرى .

سنرى فيما بعد (الفصل السابع) أنه ليس لكل مصفوفة مربعة معكوس وسنبرهن عندها أنه إذا كان للمصفوفة A معكوس فإنه يكون معكوس وحيد

أنظر المسألة ٧

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة واحدة وكان هما المعكوسان A^{-1} و B^{-1} على الترتيب فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ أى :

I - إن معكوس حاصل ضرب مصفوفتين ، يوجد لها معكوسان ، هو حاصل الضرب بترتيب معاكس لمعكوسيهما .

أنظر المسألة ٨

تدعى المصفوفة A التى تحقق العلاقة $A^2 = I$ مصفوفة ملتفة . إن مصفوفة الوحدة مصفوفة من هذا النوع وإن المصفوفة الملتفة هي معكوس نفسها .

أنظر المسألة ٩

منقول المصفوفة :

تسمى المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$

منقول المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A' (منقول A) . مثال ذلك إن منقول المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

هو المصفوفة $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

يلاحظ أن العنصر a_{ij} الذي يقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j في المصفوفة A يقع في تقاطع الصف ذي الرقم j والعمود ذي الرقم i للمصفوفة A' .

إذا كان A' و B' هما منقول A و B على الترتيب وإذا كان k مقدارا عدديا فإننا نجد بسهولة :

$$(A')' = A \text{ و } (B')' = B \text{ (ب) } (kA)' = kA'$$

يرهن في المسألتين ١٠ و ١١ ما يلي :

II — إن منقول مجموع مصفوفتين هو مجموع منقول هاتين المصفوفتين أي :

$$(A + B)' = A' + B'$$

III — إن منقول حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل الضرب بترتيب معاكس لمنقولهما أي أن

$$(AB)' = B'A'$$

أنظر المسائل ١٠-١٢

المصفوفات المتماثلة :

إذا حققت المصفوفة المربعة A العلاقة $A' = A$ قلنا إنها مصفوفة متماثلة . وعلى ذلك فالمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$

تكون مصفوفة متماثلة إذا تحققت العلاقة $a_{ji} = a_{ij}$ لكل قيم i و j

مثال ذلك : المصفوفة 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة وكذلك المصفوفة kA لأي عدد k .

في المسألة ١٣ سنبرهن

IV — إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن المصفوفة $A + A'$ متماثلة .

إذا حققت المصفوفة المربعة A العلاقة $A' = -A$ سميت مصفوفة متماثلة تخالفية أي تكون المصفوفة المربعة متماثلة تخالفية إذا كان

$a_{ij} = -a_{ji}$ لكل قيم i و j ومن الواضح أنه يجب أن تكون عناصر قطر هذه المصفوفة أصفارا . مثال ذلك $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

مصفوفة متماثلة تخالفية وكذلك المصفوفة kA مهما كان العدد k . بتغيير طفيف في برهان المسألة ١٣ يمكننا أن نبرهن ما يلي :

V — إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $A - A'$ تكون مصفوفة متماثلة تخالفية .

نستنتج من النظريتين IV و V ما يلي :

VI — يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A كمجموع المصفوفة المتماثلة $B = \frac{1}{2}(A + A')$ والمصفوفة المتخالفية $C = \frac{1}{2}(A - A')$.

أنظر المسائل ١٤-١٥

المصفوفة المترافقة :

إذا كان a و b عددين حقيقيين وكان $i = \sqrt{-1}$ فإن $z = a + bi$ يسمى عددا مركبا . ويسمى العددان

المركبان $a + bi$ و $a - bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر . إذا كان $z = a + bi$ فإنه يرمز لمرافقه

$$\bar{z} = a - bi$$

إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = a - bi$ فإنه يكون $\bar{z}_2 = \overline{a - bi} = a + bi = z_1$ أي أن المرافق للمرافق لعدد مركب z

هو هذا العدد نفسه .

إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ فإنه يكون :

$$\overline{z_1 + z_2} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \text{و} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \text{و} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) + (ad+bc)i = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (ii)$$

أي أن المرافق لمجموع عددين مركبين هو مجموع مرافقي هذين العددين :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \text{و} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) + (ad+bc)i = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (ii)$$

أى أن المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما .

إذا كانت A مصفوفة ، لها عناصر أعداد مركبة ، فإن المصفوفة التى تنتج عن A بتعويض كل عنصر فيها بمرافقه تدعى المصفوفة المرافقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز A' (المرافقة للمصفوفة A) .

$$\text{مثال ٢ : إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix} \text{ فإن يكون } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$$

إذا كان A' و B' المرافقين للمصفوفتين A و B وإذا كان k عددا ما فإنه يكون :

$$(kA) = k.A \text{ و } (A)' = A'$$

من (i) و (ii) الواردة أعلاه يمكن إثبات ما يلي :

VII - المصفوفة المرافقة لمجموع مصفوفتين هي مجموع مرافقيهما أى : $(A+B)' = A' + B'$

VIII - المصفوفة المرافقة لحاصل ضرب مصفوفتين هي حاصل ضرب مرافقيهما بنفس الترتيب أى : $(AB)' = A'.B'$

يرمز لمنقول A بالرمز A^* (منقول المصفوفة المرافقة لـ A) . ونكتب ذلك فى كثير من الأحيان بالشكل A^* كذلك :

IX - إن منقول المصفوفة المرافقة للمصفوفة A يساوى المصفوفة المرافقة لمنقول A أى $(A')^* = (A^*)'$

مثال ٣ :

من المثال ٢ ينتج أن :

$$(\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} \text{ بينما } A' = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix} \text{ و } (\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix}$$

المصفوفات الهرميتية :

تسمى المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ التى تحقق العلاقة $A' = A$ مصفوفة هيرميتية . أى أن المصفوفة A تكون هيرميتية إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ لكل قيم i و j . ومن الواضح أن عناصر قطر كل مصفوفة هيرميتية أعداد حقيقية

$$\text{مثال ٤ : } A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \text{ إن المصفوفة مصفوفة هيرميتية .}$$

هل المصفوفة kA هيرميتية إذا كان k عددا حقيقيا ما ؟ وإذا كان عددا مركبا ما ؟

المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ التى تحقق العلاقة $A' = -A$ تسمى مصفوفة هيرميتية متخالفة أى تكون المصفوفة هيرميتية متخالفة فيما إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ لكل قيم i و j ومن الواضح أن عناصر قطر مصفوفة هيرميتية متخالفة أما أن تكون أصفارا أو أعدادا تخيلية بحتة .

مثال ٥ :

$$\text{إن المصفوفة } A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix} \text{ هي مصفوفة هيرميتية متخالفة . هل } kA \text{ هيرميتية متخالفة إذا كان } k \text{ عددا حقيقيا ما ؟ وإذا كان عددا مركبا ؟ وإذا كان عددا تخيليا بحتا ؟}$$

بإحداث تغيرات طفيفة في المسألة ١٣ يمكننا أن نبرهن :

X - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $A + A'$ تكون مصفوفة هيرميتية و $A - A'$ مصفوفة هيرميتية متخالفة .

ينتج عن النظرية X ما يلي :

XI - يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A لها عناصر أعداد مركبة ، ك مجموع المصفوفة الهيرميتية $B = \frac{1}{2} (A + A')$ والمصفوفة الهيرميتية المتخالفة $C = \frac{1}{2} (A - A')$

المجموع المباشر :

إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_s مصفوفات مربعة درجاتها على الترتيب m_1, m_2, \dots, m_s فإن المصفوفة القطرية :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة A_i

مثال ٦ : إذا كان $A_1 = [2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, و $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

فإن المجموع المباشر للمصفوفات A_1 و A_2 و A_3 هو

$$\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

إن المسألة ٩ (ب) من الفصل ١ توضح النظرية التالية :

XII - إذا كان $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s)$ حيث A_i و B_i مصفوفتان من درجة واحدة

لتعير $(i = 1, 2, \dots, s)$ فإنه يكون $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_sB_s)$.

مسائل محلولة

١ - بما أن

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{22}b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

الضرب AB لمصفوفة مربعة قطرية $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ درجاتها m بأى مصفوفة B ذات الدرجة $m \times n$ نحصل عليه بضرب الصف الأول من B في a_{11} والصف الثانى منها في a_{22} وهكذا

٢- برهن أن المصفوفتين $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ تبديلتين لكل قيم a, b, c, d إن هذا ينتج عن :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

٣- برهن أن $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ متساوية القوى .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

٤- برهن أنه إذا كان $AB = A$ و $BA = B$ فإن A و B تكونا متساويتا القوى .
 إن $ABA = (AB)A = A \cdot A = A^2$ و $ABA = A(BA) = AB = A$ وعلى ذلك $A^2 = A$ أى أن A متساوية القوى .
 استخدم حاصل الضرب BAB لكي تبرهن أن B مصفوفة متساوية القوى .

٥- برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ معدومة القوى من الدرجة 3 .

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

٦- إذا كانت A مصفوفة معدومة القوى ذات الدليل 2 نبرهن أن $A(I \pm A)^n = A$ لأى عدد صحيح موجب n .

$$A(I \pm A)^n = A(I \pm nA) = A \pm nA^2 = A. \quad \text{فإن} \quad A^2 = 0, \quad A^3 = A^4 = \dots = A^n = 0.$$

٧- إذا فرضنا A و B و C مصفوفات مربعة تحقق $AB=I$ و $CA=I$ فإنه ينتج عن العلاقة $(CA)B=C(A B)$ أن $B = C$ وعلى ذلك $A^{-1} = -A^{-1}$ هو المعكوس الوحيد للمصفوفة A (ما هى المصفوفة B^{-1} ؟) .

٨- برهن أن : $A^{-1} \cdot (AB)^{-1} = B^{-1}$

بالتعريف $(AB)^{-1}(AB) = (AB)(AB)^{-1} = I$ والآن

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

$$AB(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = I \quad \text{و}$$

واستنادا إلى المسألة ٧ فإن $(AB)^{-1}$ وحيدة . أى : $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

٩- برهن ما يلي : تكون المصفوفة A مصفوفة ملتفة فيما إذا (وإذا فقط) كان $(I - A)(I + A) = 0$

لتفرض $(I-A)(I+A) = I - A^2 = 0$; فنتج عن ذلك أن $A^2 = I$ وأن A مصفوفة ملتفة .

لتفرض أن A مصفوفة ملتفة فنتج عن هذا أن $A^2 = I$ و $(I-A)(I+A) = I - A^2 = I - I = 0$.

١٠- برهن أن $(A + B)^{\sim} = A^{\sim} + B^{\sim}$

لتفرض $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ يكفيننا أن نبرهن أن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم i والعمود j من المصفوفات A^{\sim} و B^{\sim} و $(A + B)^{\sim}$ هى على الترتيب a_{ji} و b_{ji} و $a_{ji} + b_{ji}$.

١١ - برهن أن : $(AB)^{\sim} = B^{\sim} A^{\sim}$.

بفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة درجتها $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة درجتها $n \times p$ فإن $C = AB = [c_{ij}]$ مصفوفة درجتها $m \times p$. إن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من AB هو $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$. وهو أيضا العنصر الواقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من المصفوفة $(AB)^{\sim}$.

إن عناصر الصف ذي الرقم j من B^{\sim} هي $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$. وإن عناصر العمود ذي الرقم i من A^{\sim} هي $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. إذن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم j والعمود ذي الرقم i من $B^{\sim} A^{\sim}$ هو :

$$\sum_{k=1}^n b_{kj} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = c_{ij}$$

وهذا يؤدي إلى أن : $(AB)^{\sim} = B^{\sim} A^{\sim}$.

١٢ - برهن أن : $(ABC)^{\sim} = C^{\sim} B^{\sim} A^{\sim}$.

اكتب $ABC = (AB)C$ واستنتج من المسألة ١١ أن $(ABC)^{\sim} = \{(AB)C\}^{\sim} = C^{\sim}(AB)^{\sim} = C^{\sim}B^{\sim}A^{\sim}$.

١٣ - برهن أنه إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $B = [b_{ij}] = A + A^{\sim}$ تكون مصفوف متماثلة : **البرهان الأول :**

إن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j من A هو a_{ij} . وإن العنصر المناظر له في A^{\sim} هو a_{ji} . إذن $b_{ij} = a_{ji} + a_{ij}$. إن العنصر الواقع في الصف ذي الرقم j والعمود ذي الرقم i من A هو a_{ji} . وإن العنصر المناظر له في A^{\sim} هو a_{ij} . إذن $b_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$ أى أن $b_{ij} = b_{ji}$. وإن B مصفوفة متماثلة .

البرهان الثاني :

استنادا إلى المسألة ١٠ نجد $(A + A^{\sim})^{\sim} = A^{\sim} + (A^{\sim})^{\sim} = A^{\sim} + A = A + A^{\sim}$ أى أن $(A + A^{\sim})$ هي مصفوفة متماثلة .

١٤ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين متماثلتين فإن AB تكون مصفوفة متماثلة إذا (وإذا فقط) كانت المصفوفتان A و B تبديليتين .

نفرض أن A و B تبديليتان أى $(AB)^{\sim} = B^{\sim}A^{\sim} = BA = AB$. فيكون $(AB)^{\sim} = B^{\sim}A^{\sim} = BA = AB$ أى أن AB متماثلة .
نفرض أن AB متماثلة أى $(AB)^{\sim} = A^{\sim}B^{\sim} = BA$ الآن $(AB)^{\sim} = B^{\sim}A^{\sim} = BA$ وينتج عن ذلك أن $AB = BA$ وأن المصفوفتين A و B تبديليتان .

١٥ - برهن أنه إذا كانت المصفوفة المربعة A ذات الدرجة m متماثلة (متماثلة تخالفية) وإذا كانت المصفوفة P من الدرجة $m \times n$ فإن $B = P^{\sim}AP$ مصفوفة متماثلة (متماثلة تخالفية) .

إذا كانت A متماثلة (انظر المسألة ١٢) ، فإن $B^{\sim} = (P^{\sim}AP)^{\sim} = P^{\sim}A^{\sim}(P^{\sim})^{\sim} = P^{\sim}A^{\sim}P = P^{\sim}AP = B$. وينتج عن هذا أن B متماثلة .

إذا كانت A متماثلة تخالفية فإن $B^{\sim} = (P^{\sim}AP)^{\sim} = -P^{\sim}A^{\sim}P = -P^{\sim}AP = -B$. وينتج عن ذلك أن B متماثلة تخالفية .

١٦ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة n فإن A و B تبديليتان إذا (وإذا فقط) كان $A - kI$ و $B - kI$ تبديليتين لأى قيمة للعدد k .

نفرض أن A و B تبديليتان أى $AB = BA$ وعلى ذلك

$$\begin{aligned} (A - kI)(B - kI) &= AB - k(A + B) + k^2I \\ &= BA - k(A + B) + k^2I = (B - kI)(A - kI) \end{aligned}$$

وينتج عما تقدم أن $A - kI$ و $B - kI$ تبديليتان .

لتفرض أن $A - kI$ و $B - kI$ تبديلتان فيكون :

$$\begin{aligned}(A - kI)(B - kI) &= AB - k(A + B) + k^2I \\ &= BA - k(A + B) + k^2I = (B - kI)(A - kI)\end{aligned}$$

ونجد أن $AB = BA$ وهذا يعني أن A و B تبديلتان .

مسائل إضافية

١٧ - برهن أن حاصل ضرب مصفوفتين مثلثيتين علويتين (سفليتين) هو مصفوفة مثلثية علوية (سفلية) .

١٨ - استنتج قاعدة لتكوين حاصل ضرب BA للمصفوفة B ذات الدرجة $m \times n$ بالمصفوفة القطرية : $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

إرشاد : أنظر المسألة ١

١٩ - برهن أنه يمكن كتابة المصفوفة العددية التي عناصرها قطرها هي العدد k بالشكل kI وأن $kA = kIA = \text{diag}(k, k, \dots, k)$ A ، حيث تساوى درجة I عدد صفوف المصفوفة A .

٢٠ - إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n نبرهن أن $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$ حيث p و q عدداً صحيحان موجبان .

$$21 - (أ) \text{ برهن أن } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ متساويتا القوى .}$$

(ب) استعمل A و B لتبرهن على أن عكس المسألة غير صحيح .

٢٢ - إذا كانت A مصفوفة متساوية القوى نبرهن أن $B = I - A$ متساوية القوى . وأن $AB = BA = 0$:

$$23 - (أ) \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ نبرهن أن } A^2 - 4A - 5I = 0 .$$

$$(ب) \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ نبرهن أن } A^3 - 2A^2 - 9A = 0 . \text{ لكن } A^2 - 2A - 9I \neq 0 .$$

$$24 - \text{برهن أن } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I .$$

$$25 - \text{برهن أن } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة دورية دورتها 2}$$

$$26 - \text{برهن أن } \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ مدومة القوى .}$$

$$27 - \text{برهن أن } (أ) \text{ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \text{ تبديلتان}$$

$$(ب) \text{ } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{bmatrix} \text{ تبديلتان}$$

٢٨ - برهن أن $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ تبدليتان عكسياً وأن

٢٩ - برهن أن كلا من المصفوفات $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ تبدلية عكسياً كل مع الأخرى .

٣٠ - برهن أن المصفوفات الوحيدة التبدلية مع كل مصفوفة مربعة من الدرجة n هي المصفوفات المربعة العددية من الدرجة n

٣١ - (أ) أوجد كل المصفوفات التبدلية مع $\text{diag} (1, 2, 3)$

(ب) أوجد كل المصفوفات التبدلية مع $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

الجواب (أ) $\text{diag}(a, b, c)$ حيث a, b, c هي اختيارية .

٣٢ - برهن أن (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ هي معكوس $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ هي معكوس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

٣٣ - افرض $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ إيجاد معكوس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ الجواب $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

٣٤ - برهن أن معكوس مصفوفة قطرية A لا يساوي أى عنصر في قطرها الصفر ، هو مصفوفة قطرية عناصر قطرها ، معكوسات عناصر قطر A وواقعة بالترتيب الأصلي ذاته وهي من درجة A نفسها وبصورة خاصة يكون معكوس I_n هو I_n نفسها .

٣٥ - برهن أن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ملتفتان .

٣٦ - بالتجزئ أكتب $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ A_{21} & -I_2 \end{bmatrix}$ ، برهن أن $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$.

٣٧ - برهن أن (أ) $(A')' = A$ ، (ب) $(kA)' = kA'$ ، (ج) $(A^p)' = (A')^p$ حيث p عدد صحيح موجب .

٣٨ - برهن أن $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ ، رعاذ ... أكتب : $(AB)C$ ، $A B C$.

٣٩ - برهن (أ) $(A^{-1})^{-1} = A$ ، (ب) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ ، حيث p عدد صحيح موجب .

٤٠ - برهن أن كل مصفوفة حقيقية متماثلة هي مصفوفة هيرميتية .

٤١ - برهن أن (أ) $\overline{(A)} = A$ ، (ب) $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$ ، (ج) $\overline{(kA)} = \overline{k} \overline{A}$ ، (د) $\overline{(AB)} = \overline{A} \overline{B}$.

٤٢ - برهن أن (أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ هيرميتية .

(ب) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ هيرميتية متخالفة .

(ج) iB هيرميتية .

(د) \overline{A} هيرميتية و \overline{B} هيرميتية متخالفة .

٤٣- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن أن (١) AA^{\sim} و $A^{\sim}A$ مائلتان (ب) $A + \bar{A}$ و \overline{AA} هيرميتية .

٤٤- برهن أنه إذا كانت H مصفوفة هيرميتية وكانت A أى مصفوفة متوافقة بالنسبة للضرب فإن HA (ب) تكون مصفوفة هيرميتية .

٤٥- برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة هيرميتية A بالشكل $B + iC$ حيث B مصفوفة حقيقية مائلة و C مصفوفة حقيقية مائلة تخالفية .

٤٦- برهن (١) أنه يمكن كتابة كل مصفوفة هيرميتية تخالفية A بالشكل $A = B + iC$ حيث B حقيقية مائلة تخالفية و C مصفوفة مائلة حقيقية .

(ب) وأن $\bar{A}A$ تكون حقيقية إذا (وإذا فقط) كانت B و C متبادلتين عكسيا .

٤٧- برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين فإن $A^{-1}, A^{-1}; B^{-1}, B^{-1}; \bar{A}, \bar{B}$ تكون ثلاثة أزواج تبديلية من المصفوفات .

٤٨- برهن أنه لقيم m و n الصحيحة الموجبة تكون B^n و A^m تبديليتين فيما إذا كانت المصفوفتان A و B تبديليتين .

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad (١)$$

٥٠- برهن أنه إذا كانت A مائلة أو مائلة تخالفية فإن $AA^{\sim} = A^{\sim}A$ و A^2 مائلتان .

٥١- إذا كانت a, b, \dots, g مقادير عددية p عدد صحيح موجب ، فأثبت أنه إذا كانت A مائلة فإن $aA^p + bA^{p-1} + \dots + gI$ تكون مائلة أيضا .

٥٢- برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A بالشكل $A = B + C$ حيث B مصفوفة هيرميتية و C مصفوفة هيرميتية متخالفة .

٥٣- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية مائلة تخالفية أو إذا كانت A مصفوفة مركبة وهيرميتية تخالفية فإن $\pm iA$ هيرميتية .

٥٤- برهن أنه يمكن ذكر النظرية الواردة في المسألة ٥٢ بالشكل التالي :

يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A بالشكل $A = B + iC$ حيث B و C مصفوفتان هيرميتيتان .

٥٥- برهن أنه إذا حققت كل من A و B العلاقتين $AB = A$ و $BA = B$ فإن (١) $A^{\sim}B^{\sim} = B^{\sim}$ ، $B^{\sim}A^{\sim} = A^{\sim}$ (ب) B^{\sim}, A^{\sim} مصفوفتان متساويتا القوى . (ج) $A = B = I$ وذلك إذا كان A معكوس .

٥٦- إذا كانت A مصفوفة ملتفة فبرهن أن $\frac{1}{2}(I + A)$ و $\frac{1}{2}(I - A)$ مصفوفتان متساويتا القوى وأن $\frac{1}{2}(I + A) \cdot \frac{1}{2}(I - A) = 0$.

٥٧- إذا كان لمصفوفة مربعة A معكوس A^{-1} فبرهن أن :

$$(A^{-1})^{\sim} = (\bar{A}^{-1})^{\sim} \quad (ج) \quad \text{و} \quad (\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}} \quad (ب) \quad \text{و} \quad (A^{-1})^{\sim} = (\bar{A}^{-1})^{\sim} \quad (١)$$

إرشاد : (١) يمكن باستخدام منقول $AA^{-1} = I$ وإيجاد $(A^{-1})^{\sim}$ كمكوس للمصفوفة A^{\sim}

٥٨- أوجد كل مصفوفة قابلة للمبادلة مع (١) $\text{diag}(1, 1, 2, 3)$ (ب) $\text{diag}(1, 1, 2, 2)$

الجواب : (١) $\text{diag}(A, b, c)$ ، (ب) $\text{diag}(A, B)$ حيث A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثانية عناصرهما اختيارية و c و b مقداران عدديان .

٥٩ - إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_s مصفوفات عددية درجتها على الترتيب m_1, m_2, \dots, m_s ، فأوجد كل المصفوفات القابلة للمبادلة

$$\text{مع } \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$$

الجواب : $\text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s)$ حيث B_1, B_2, \dots, B_s مصفوفات درجتها على الترتيب $m_1 + m_2 = m$

وعناصرها اختيارية .

٦٠ - إذا كان $AB = 0$ حيث A و B مصفوفتان مربعتان غير صفريتين ، فإننا نقول إن A و B قاسمان للصفر .
برهن أن المصفوفتين A و B الواردتين في المسألة ٢١ قاسمان للصفر .

٦١ - إذا كان $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ و $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_s)$ حيث A_i و B_i من نفس الدرجة ، $(i=1, 2, \dots, s)$

فبرهن أن :

$$A + B = \text{diag}(A_1 + B_1, A_2 + B_2, \dots, A_s + B_s) \quad (أ)$$

$$AB = \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_s B_s) \quad (ب)$$

$$\text{trace } AB = \text{trace } A_1 B_1 + \text{trace } A_2 B_2 + \dots + \text{trace } A_s B_s \quad (ج)$$

٦٢ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة n متماثلتين تخالفيتين فإن AB تكون متماثلة إذا (وإذا فقط) كانت A و B تبديليتين .

٦٣ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان $B = rA + sI$ حيث r و s مقداران عدديان ، فإن A و B تبديليتان .

٦٤ - لنفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة n وأن r_1, r_2, s_1, s_2 مقادير عددية بحيث يكون $r_1 s_2 \neq r_2 s_1$.

برهن أن المصفوفتين $C_1 = r_1 A + s_1 B$ ، $C_2 = r_2 A + s_2 B$ تبديليتين ، إذا (وإذا فقط) كانت A و B تبديليتين .

٦٥ - برهن أن مصفوفة مربعة A درجتها n لا يكون لها معكوس إذا (أ) كانت عناصر صف (عمود) منها معدومة أو

(ب) كان صفان (عمودان) منها متساويين أو (ج) كان صف (عمود) مساويا لمجموع صفين (عمودين) آخرين فيها .

٦٦ - إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n وكان A معكوس فبرهن أن :

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

الفصل الثالث

محددة مصفوفة مربعة

التبادل : اعتبر التباديل $6 = 3! = 3!$ للأعداد الطبيعية 1,2,3 مأخوذة كلها

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321 \quad (3.1)$$

وثمانية تباديل من أصل التباديل $24 = 4! = 4!$ للأعداد الطبيعية 1,2,3,4 مأخوذة كلها :

$$\begin{array}{cccc} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \end{array} \quad (3.2)$$

إذا وقع عدد طبيعي في تبديل ، قبل آخر يصغره ، نقول إنه يوجد تعاكس . وإذا كان ، في تبديل ما ، عدد التعاكسات زوجيا (فرديا) فإننا نسمى هذا التبديل بأنه زوجي (فردي) . مثال ذلك في (3.1) ، نجد أن التبديل 123 زوجي لأنه لا يحوى تعاكسات وأن التبديل 132 فردي لأن العدد 3 يسبق العدد 2 وأن التبديل 312 زوجي لأن فيه العدد 3 يسبق العدد 1 والعدد 3 يسبق العدد 2 . أما في (3.2) ، فإن التبديل 4213 زوجي لأن العدد 4 يسبق العدد 2 والعدد 4 يسبق العدد 1 والعدد 4 يسبق العدد 3 وأخيرا العدد 2 يسبق العدد 1 .

محددة مصفوفة مربعة : اعتبر المصفوفة المربعة من الدرجة n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

وحاصل الضرب .

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (3.4)$$

لـ n من عناصر هذه المصفوفة ، اخترت بأخذ عنصر واحد فقط من كل صف وعنصر واحد فقط من كل عمود من هذه المصفوفة . في (3.4) تم ترتيب العوامل ، كما هو معتاد ، بحيث تكون متوالية الدليل الأول لهذه العوامل بالترتيب الطبيعي 1,2,...,n، إن المتوالية j_1, j_2, \dots, j_n للدليل الثاني هي واحدة من متبادلات الأعداد 1, 2, ..., n، والتي يساوي عددها n (سيزداد القارئ خبرة لو أجرى موازيا للعمل الوارد في هذا الكتاب ، برهاننا آخر يستعمل فيه حاصل ضرب حيث تكون متوالية الدليل الثاني مرتبة بالترتيب الطبيعي) .

لأى تبديل معين j_1, j_2, \dots, j_n لأدلة العوامل الثانية ، نفرض $+1 = j_1 j_2 \dots j_n \in$ أو -1 بحسب ما يكون هذا التبديل زوجيا أو فرديا ولنكتب حاصل الضرب المذكور مزودا بإشارة :

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (3.5)$$

نعني بمحددة A ونرمز لها بالرمز $|A|$ ، مجموع كل حواصل الضرب التي من الشكل (3.5) والمسماة بمحدود $|A|$ والتي يمكن تكوينها من عناصر A وأى

$$|A| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (3.6)$$

حيث يشمل التجميع على j_1, j_2, \dots, j_n تباديل الأعداد الطبيعية 1,2,...,n، وإن عدد هذه التباديل يسوى $\rho = n$ تسمى محددة المصفوفة المربعة من الدرجة n محددة من الدرجة n .

المحددة من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة :

من (3.6) في حالة $n = 2$ و $n = 3$ نحصل على

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + \epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} + \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \quad \text{ـ أـ}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 = 0 + 3 = 3 \quad \text{ـ بـ}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 3(1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + 5(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9 \end{aligned} \quad \text{ـ جـ}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} &= 2\{0(-6) - (-2)(-5)\} - (-3)\{1(-6) - (-2)0\} + (-4)\{1(-5) - 0 \cdot 0\} \\ &= -20 - 18 + 20 = -18 \end{aligned} \quad \text{ـ دـ}$$

أنظر المسألة ١

خواص المحددات :

في كل موضع من هذا البند ، نعى بـ A مصفوفة مربعة يعطى محددها $|A|$ بالعلاقة (3.6) .
لنفرض أن كل عنصر من الصف ذى الرقم i (كل عنصر من العمود ذى الرقم j) يساوى الصفر . بما أن كل حد من حدود المجموع (3.6) يحوى عنصرا من هذا الصف (العمود) فإن كل عنصر من هذا المجموع يساوى الصفر ونستنتج من ذلك :

- I. إذا كان كل عنصر من صف (عمود) في مصفوفة مربعة ، مساويا للصفر ، فإن $|A| = 0$.
- ليكن A' منقول المصفوفة A نرى أن كل حد من (3.6) يمكن الحصول عليه من A' بأن نختار العوامل بالترتيب من العمود الأول ثم الثانى ثم الأخير أى :
- II. إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $|A'| = |A|$ وهذا يعنى أنه ، لكل نظرية تتعلق بمصفوف محددة ، يوجد نظرية مناظرة تتعلق بأعمدة هذه المحددة والعكس بالعكس .

لتكن B المصفوفة التي تنتج من A بضرب كل عنصر من عناصر صفها ذي الرقم i بالعدد k بما أن كل حد من مفكوك $|B|$ يحوى عنصرا واحدا فقط من عناصر هذا الصف فإنه ينتج عن لك، أن كل حد من هذا المفكوك يحوى k كعامل ويكون :

$$|B| = k \sum_p \{\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n}\} = k |A|$$

لذلك ،

III. إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف (عمود) المحددة $|A|$ بالعدد k فإن المحددة تضرب في k إذا حوى كل عنصر من عناصر صف (عمود) المحددة $|A|$ العامل (المضروب) k فإنه يمكن وضع k كضروب مشترك في $|A|$

مثال ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

لنرمز بالرمز B للمصفوفة التي تنتج عن A بالمبادلة بين الصفين اللذين يحملان الرقمين i و $i+1$. إن كل حاصل ضرب في (3.6) المتعلق بـ $|A|$ هو حاصل ضرب في $|B|$ والعكس بالعكس أى ، بإهمال الإشارات، يمكننا أن نقول إن (3.6) هو مفكوك $|B|$. عند عد التعاكسات في دليل أى حد من (3.6) كحد في $|B|$ فإننا نلاحظ أن وضع $i+1$ قبل i يعطى تعاكسا إضافيا وعلى ذلك فكل مضروب في (3.6) مع تغيير إشارته هو حد من حدود $|B|$ ويكون $|B| = -|A|$ أى :

IV. إذا نتج B عن A بالمبادلة بين صفين (عمودين) متجاورين فإنه يكون $|B| = -|A|$. كنتيجة للنظرية IV نجد :

V. إذا نتج B من A بالمبادلة بين أى صفين (عمودين) منه فإن $|B| = -|A|$.

VI. إذا نتج B عن A بإمرار الصف (العمود) ذي الرقم i فوق p صفا (عمودا) من A فإنه يكون :

$$|B| = (-1)^p |A|$$

VII. إذا كان صفان (عمودان) من A متطابقين فإن $|A| = 0$.

لنفرض أن كل عنصر من عناصر الصف الأول من A مكونا من مجموع حدين : $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$ حيث $(j = 1, 2, \dots, n)$ فإنه يكون :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} (b_{1 j_1} + c_{1 j_1}) a_{2 j_2} a_{3 j_3} \dots a_{n j_n} \\ &= \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} b_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3} \dots a_{n j_n} + \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} c_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3} \dots a_{n j_n} \\ &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

على وجه العموم

VIII. إذا كان كل عنصر من عناصر الصف (العمود) ذي الرقم i من A مجموع p حدا فإنه يمكن كتابة $|A|$ كمجموع p محددة .

إن عناصر الصف (العمود) ذى الرقم z من هذه المحددات على الترتيب العناصر الأولى ، الثانية ... الأخيرة من المجاميع المذكورة ، أما بقية الصفوف (الأعمدة) فتبقى هي نفسها الموجودة في A .
إن النظرية الأكثر استعمالاً هي التالية :

IX. إذا أنتجت المصفوفة B من المصفوفة A ، بإضافة عناصر الصف (العمود) ذى الرقم i بعد ضربها بعدد ثابت إلى العناصر المناظرة لصف (عمود) آخر من A ، فإنه يكون $|B| = |A|$.
مثال ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{21} & a_{32} + ka_{22} & a_{33} + ka_{23} \end{vmatrix}$$

أنظر المسائل ٢ - ٧

المصفورات الأولى والمعاملات المرافقة :

لتكن المصفوفة المربعة A ذات الدرجة n المعطاة في (3.3) ومحددتها $|A|$ المعطاة بالعلاقة (6-3) إذا حذفنا من A عناصر صفه ذى الرقم i وعموده ذى الرقم j فإننا نسمى محددة المصفوفة المربعة ذات الدرجة $(n-1)$ الناتجة ، المصغر الأول للمصفوفة A أو للمحددة $|A|$ ونرمز له بالرمز $|M_{ij}|$ وكثيراً ما نسميه مصغر a_{ij} . تسمى المصغر مزوداً بإشارته $|M_{ij}| (-1)^{i+j}$ بالمعامل المرافق للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز α_{ij} .

$$\text{مثال ١ : إذا كان } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ فإن}$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}|, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}|,$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}|$$

وتأخذ عندها العلاقة (3.8) الشكل :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} |M_{11}| - a_{12} |M_{12}| + a_{13} |M_{13}| \\ &= a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{12} + a_{13} \alpha_{13} \end{aligned}$$

في المسألة ٩ نبرهن النظرية التالية :

X. إن قيمة المحددة $|A|$ حيث A هي المصفوفة المعطاة في (3.3) تساوى مجموع حواصل الضرب التى تحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر صف (عمود) من المعامل المرافق له أى :

$$|A| = a_{i1} \alpha_{i1} + a_{i2} \alpha_{i2} + \dots + a_{in} \alpha_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_{ik} \quad (3.9)$$

$$= a_{1j} \alpha_{1j} + a_{2j} \alpha_{2j} + \dots + a_{nj} \alpha_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \alpha_{kj} \quad (i, j, = 1, 2, \dots, n) \quad (3.10)$$

باستخدام النظرية VII يمكننا أن نبرهن :

XI. إن مجموع حواصل الضرب المكونة من ضرب عناصر صف (عمود) من المصفوفة المربعة A ذات الدرجة n بالعمولات المرافقة لعناصر صف (عمود) آخر من A يساوى الصفر .

مثال ٢ : إذا كانت A مصفوفة المثال ٢ فإنه يكون :

$$a_{31}a_{31} + a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} = |A|$$

$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} = |A|$$

بينما نجد :

$$a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$$

أنظر المسألتين ١٠-١١

المصفورات والتميمات الجبرية :

لتكن المصفوفة (3.3) ولنفرض أن i_1, i_2, \dots, i_m مرتبة بالترتيب المتزايد هي m ، حيث $(n > m \geq 1)$ دليل من أدلة الصفوف $1, 2, \dots, n$ نفرض أيضا أن j_1, j_2, \dots, j_m مرتبة بالترتيب المتزايد هي m دليل من أدلة أعمدة ولنفرض أخيرا أن الصفوف والأعمدة الباقية مرتبة أيضا بالترتيب المتزايد هي $j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n$ و $i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n$ على الترتيب . إن مثل هذا الفصل لأدلة الصفوف والأعمدة يعين ، بشكل وحيد ، المصفوفتين :

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m} = \begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \dots & a_{i_1, j_m} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \dots & a_{i_2, j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \dots & a_{i_m, j_m} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & a_{i_{m+1}, j_{m+2}} & \dots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ a_{i_{m+2}, j_{m+1}} & a_{i_{m+2}, j_{m+2}} & \dots & a_{i_{m+2}, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n, j_{m+1}} & a_{i_n, j_{m+2}} & \dots & a_{i_n, j_n} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

والثان تسميان المصفوفتين الجزئيتين للمصفوفة A .

نسمى محددة كل من هاتين المصفوفتين الجزئيتين مصغراً لـ A ونسمى زوج المصفوفتين $\left| A_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m} \right|$ بالمصفوفتين التامتين لـ A وكل واحد منهما متمم الآخر .

مثال ٣ : المصفوفة المربعة من الدرجة الخامسة $A = [a_{ij}]$ تكون المحددتان .

$$\left| A_{1,3,4}^{2,4,5} \right| = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \quad , \quad \left| A_{2,5}^{1,3} \right| = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{bmatrix}$$

زوجاً من المصفورات المتتامه .

إذا فرضنا

$$p = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m \quad (3.13)$$

$$q = i_{m+1} + i_{m+2} + \dots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \dots + j_n \quad (3.14)$$

فإننا نسمى المصغر ذا الإشارة $(-1)^p \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ المتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \text{ وأن } (-1)^q \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \text{ هو المتمم الجبرى لـ}$$

مثال ٤ : للمصغرين الواردين في المثال ٣ يكون $\begin{vmatrix} 1,3 \\ 2,5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1,3 \\ 2,5 \end{vmatrix}$ هو المتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 1,3,4 \end{vmatrix}$

وأن $\begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 1,3,4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 1,3,4 \end{vmatrix}$ هو المتمم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} 1,3 \\ 2,5 \end{vmatrix}$. يلاحظ أن الإشارة المعطاة لاثنتين من المصغرات المتتامة واحدة هل هذا صحيح دوما ؟

عندما يكون $m=1$ فإن (3.11) تصبح $A_{i_1}^{j_1} = [a_{i_1 j_1}]$ و $|A_{i_1}^{j_1}| = a_{i_1 j_1}$. عنصرا من A .

يكتب المصغر المتمم $\begin{vmatrix} j_2, j_3, \dots, j_n \\ i_2, i_3, \dots, i_n \end{vmatrix}$ بالشكل $|M_{i_1, j_1}|$ الوارد في البند السابق ويصبح المتمم الجبرى هو المعامل المرافق $a_{i_1 j_1}$

يسمى مصفر A الذى عناصره القطرية هي عناصر قطرية في A ، مصفراً رئيسياً لـ A . إن المتمم الجبرى لمصفر رئيسى لـ A هو أيضا مصفر رئيسى لـ A ، إن المتمم الجبرى لمصفر رئيسى هو متممة نفسه .

مثال ٥ : في المصفوفة المربعة ذات الدرجة الخامسة $A = [a_{ij}]$ نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 2,4,5 \\ 2,4,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1,3 \\ 1,3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مصفران رئيسيان متتامان لـ A . ما هو المتمم الجبرى لكل منهما ؟

إن التعابير مصفر ، مصفر متمم ، متمم جبرى ، ومصفر جبرى المعروفة سابقا للمصفوفة المربعة A ستستخدم بدون تغيير بالنسبة للمحددة $|A|$.

أنظر المسائلين ١٢-١٣

مسائل محلولة

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3(-1) = 11 \quad \text{ـ اـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) - 0 + 2(3 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -2 - 4 = -6 \quad \text{ـ بـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1(4 \cdot 21 - 15 \cdot 6) + 6(3 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -18 \quad \text{ـ جـ}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) = 4 \quad \text{ـ دـ}$$

٢ - أضف إلى عناصر العمود الأول العناصر المناظرة من بقية الأعمدة فنجد :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

استنادا إلى النظرية I .

٣ - أضف العمود الثاني إلى الثالث ، احذف العامل المشترك مع العمود الثالث الناتج واستفد من النظرية VII فنجد :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٤ - أضف إلى الصف الثالث ، الأول والثاني ، وحذف العامل المشترك 2 ، واطرح الصف الثاني من الصف الثالث ، واطرح الصف الثالث من الصف الأول ، واطرح الصف الأول من الثاني ، وأخيرا بحمل الصف الثالث فوق بقية الصفوف فنجد :

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

٥ - بدون شك أثبت أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

اطرح الصف الثاني من الأول فنجد :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1 - a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2) \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

استنادا إلى النظرية III وإلى أن $a_1 - a_2$ عامل لـ $|A|$. بالمثل $a_2 - a_3$ و $a_3 - a_1$ يكونان عاملان . بما أن $|A|$ من الدرجة الثالثة بالنسبة لهذه الحروف فإنه يكون :

$$|A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1). \quad (i)$$

إن حاصل ضرب العناصر القطرية $a_1^2 a_2 a_3$ هو حد من $|A|$ وينتج من (i) أن هذا الحد هو $k a_1^2 a_2 a_3$ إذن

$$k = -1 \text{ and } |A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1). \text{ نلاحظ أن } |A| \text{ يتلاشى إذا (وإذا فقط)}$$

تساوى اثنان من a_1, a_2, a_3 .

٦ - برهن أنه إذا كانت A متماثلة تحالفية ومن درجة فردية $2p - 1$ فإن $|A| = 0$.

بما أن A متماثلة تحالفية $A' = -A$ ، إذن $|A'| = -|A|$ ، $|A'| = (-1)^{2p-1} |A| = -|A|$ ولكن استنادا إلى النظرية

II نجد أن $|A'| = |A|$ وينتج عن ذلك أن $|A| = -|A|$ و $|A| = 0$.
 ٧- برهن أنه إذا كانت A هرميتية ، فإن $|A|$ يكون عدداً حقيقياً .
 بما أن A هرميتية فإنه يكون $\bar{A} = A'$ استناداً إلى النظرية II وكذلك $|A| = |A'| = |\bar{A}|$ ولكن إذا كان

$$|A| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a + bi$$

فإن

$$|\bar{A}| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \bar{a}_{1j_1} \bar{a}_{2j_2} \dots \bar{a}_{nj_n} = a - bi$$

ولكن $|\bar{A}| = |A|$ يتطلب أن يكون $b = 0$ وعلى ذلك يكون $|A|$ عدداً حقيقياً .

٨- في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ يكون

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, & \alpha_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, & \alpha_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\ \alpha_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, & \alpha_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, & \alpha_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \alpha_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & \alpha_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, & \alpha_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

يجدر بنا أن نلاحظ أن الإشارات التي أعطيت لمصفورات العناصر تكونين المعاملات المرافقة تتبع الجدول التالي :

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

حيث تحتل كل إشارة نفس المكان الذي يحتله العنصر المراد الحصول على معامله المرافق في A . اكتب جدول إشارات مشابه لمصفوفة مربعة من الدرجة الخامسة .

٩- برهن : أن قيمة المحددة $|A|$ لمصفوفة مربعة من الدرجة n تساوى مجموع حواصل الضرب التي نحصل عليها بضرب كل عنصر من صف (عمود) من A بمعاملة المرافق .
 سنثبت هذا لصف . إن حدود (٣-٦) والتي تحوى a_{11} كعامل هي :

$$a_{11} \sum \epsilon_{1, j_2 j_3 \dots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (1)$$

إن $\epsilon_{1, j_2 j_3 \dots j_n} = \epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n}$ وذلك لأن العدد 1 في التبديل $1, j_1, j_2, \dots, j_n$ يقع في الترتيب الطبيعي وينتج عن ذلك

أنه يمكن كتابة (١) بالشكل التالي :

$$a_{11} \sum \epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \quad (ب)$$

حيث يمتد التجمع على $\sigma = (n-1)!$ تبديلاً للأعداد $2, 3, \dots, n$ ويمكن نتيجة لذلك كتابة المجموع السابق بالشكل :

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} |M_{11}| \quad (ج)$$

لتكن المصفوفة B التي تنتج عن A بنقل العمود ذي الرقم s فوق الأعمدة الـ $(s-1)$ الأول فينتج عن النظرية VI أن $|B| = (-1)^{s-1} |A|$. علاوة على ذلك فإن العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول في B هو a_{1s} وإن مصغر a_{1s} في B هو بالضبط المصغر $|M_{1s}|$ نفسه للعنصر a_{1s} من A . إذا استمدنا برهان العلاقة (ج) فإننا نجد أن حدود $|M_{1s}|$ a_{1s} هي كلها حدود $|B|$ التي تحوي a_{1s} كعامل وينتج عن هذا أنها جميعا حدود $|A|$ $(-1)^{s-1}$ والحاوية على a_{1s} كعامل. وهذا يؤدي إلى أن حدود $\{a_{1s}(-1)^{s-1}|M_{1s}|\}$ هي حدود المحددة $|A|$ التي تحوي a_{1s} كعامل أي :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\{(-1)^{1+1}|M_{11}|\} + a_{12}\{(-1)^{1+2}|M_{12}|\} \\ &+ \dots + a_{1s}\{(-1)^{1+s}|M_{1s}|\} + \dots + a_{1n}\{(-1)^{1+n}|M_{1n}|\} \quad (3.15) \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \dots + a_{1n}\alpha_{1n} \end{aligned}$$

وحيث أن $(-1)^{s-1} = (-1)^{s+1}$ نجد (3.9) بجعل $i = 1$ سنسمى (3.15) مفكوك $|A|$ على طول الصف الأول منه .

إن مفكوك $|A|$ ، على طول الصف ذي الرقم r (هو (3.9) بوضع $i = r$) ، يمكن الحصول عليه بإعادة البرهان السابق . لتكن B المصفوفة التي نحصل عليها من A بنقل الصف ذي الرقم r فوق الـ $(r-1)$ صفا الأول ونقل عمودها ذي الرقم s فوق $(s-1)$ الأعمدة الأول . فيكون :

$$|B| = (-1)^{r-1} \cdot (-1)^{s-1} |A| = (-1)^{r+s} |A|$$

إن عنصر الصف الأول والعمود الأول من B هو a_{rs} وإن مصغر a_{rs} من B هو بالضبط مصغر a_{rs} من A وينتج عن هذا أن حدود :

$$a_{rs}\{(-1)^{r+s}|M_{rs}|\}$$

هي كل حدود $|A|$ التي تحوي a_{rs} كعامل أي :

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{rk}\{(-1)^{r+k}|M_{rk}|\} = \sum_{k=1}^n a_{rk}\alpha_{rk}$$

ونجد (3.9) للقيمة $i = r$

١٠ - إذا كان a_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ من الدرجة n فبرهن أن :

$$k_1\alpha_{1j} + k_2\alpha_{2j} + \dots + k_n\alpha_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & k_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & k_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & k_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i)$$

تنتج هذه العلاقة عن (3.10) بعد أن نستعوض عن $k_1 = a_{1j}$ وعن $k_2 = a_{2j}$ ، ، ، ، ، $k_n = a_{nj}$ بإجراء هذه التعديلات لا يتغير أي واحد من المعاملات المرافقة $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}$ لأنه لا يحوى أي واحد منها أي عنصر من العمود ذي الرقم j من A .

نجد استنادا إلى النظرية VII أن المحددة الواردة في (i) تساوى الصفر عندما يكون $k_r = a_{rs}$ حيث $r=1,2,\dots,n$ و $r \neq j$ واستنادا إلى النظريتين VIII و VII فإن المحددة الواردة في (i) هي $|A|$ عندما يكون $k_r = a_{rj} + ka_{rs}$ حيث $k_r = 1,2,\dots,n$ و $r \neq j$.

اكتب العلاقة المشابهة لـ (i) التي تنتج عن (3.9) عندما نستعوض فيها عن عناصر الصف ذي الرقم i من A

$$= k_1, k_2, \dots, k_n$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} \quad \text{ـ} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{ـ} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ـ} \quad \text{١١ - احسب (١)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{ـ} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ـ} \quad \text{(ب)}$$

(١) بالفك على طول العمود الثاني (أنظر النظرية X) :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = 0 \cdot \alpha_{12} + 0 \cdot \alpha_{22} + (-5)\alpha_{32} \\ &= -5(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-6) = -10 \end{aligned}$$

(ب) اطرح مرتين العمود الثاني من العمود الثالث (أنظر النظرية IX) :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2 \cdot 4 \\ -2 & 1 & 5-2 \cdot 1 \\ -3 & 2 & 4-2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3(14) = -42 \end{aligned}$$

(ج) اطرح ثلاث مرات الصف الثاني من الصف الأول واجمع مرتين الصف الثاني إلى الثالث :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3(1) & 4-3(2) & 5-3(3) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2+2(1) & 5+2(2) & -4+2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-4+36) = -32 \end{aligned}$$

(د) اطرح العمود الأول من العمود الثاني ثم قم بماقت به في (ج) :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -11 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2(1) & 1 & -4+4(1) \\ 5-2(-11) & -11 & 3+4(-11) \\ 4-2(-2) & -2 & -3+4(-2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -11 & -41 \\ 8 & -2 & -11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 27 & -41 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -31 \end{aligned}$$

(هـ) ضع العدد 14 كعامل مشترك بين عناصر العمود الأول ، خارج المحددة واستعمل النظرية IX لإختزال عناصر بقية الأعمدة فنجد :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 2 & 25-12(2) & 38-20(2) \\ 3 & 38-12(3) & 65-20(3) \\ 4 & 47-12(4) & 83-20(4) \end{vmatrix} \\ &= 14 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -14(-1-54) = 770 \end{aligned}$$

١٢ - بين أن p و q المعرفين بالعلاقين (3.13) و (3.14) إما أن يكونا زوجين معا أو فردين معا .

بما أن دليل كل صف (عمود) واقع إما في p وإما في q ولا يمكن أن يقع فيهما معاً فإن :

$$p + q = (1+2+\dots+n) + (1+2+\dots+n) = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

أى أن $q + p$ زوجى (لأنه إما أن يكون n أو $n+1$ زوجياً) وهذا يعنى أنه إما أن يكون q و p زوجين معاً أو أن يكونا فرديين معاً وأن $(-1)^q = (-1)^p$ وأنه يكفى حساب واحد منهما فقط .

$$13- \text{ في المصفوفة } A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix} \text{ ، } |A_{2,3}^{2,4}| \text{ هو :}$$

$$(-1)^{2+3+2+4} |A_{1,4,5}^{1,3,5}| = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix}$$

أنظر المسألة ١٢

$$|A_{2,3}^{2,4}| = - \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix} \text{ هو } |A_{1,4,5}^{1,3,5}| \text{ وإن المتمم الجبرى لـ}$$

مسائل إضافية

١٤- برهن أن التبديل 12534 للأعداد الطبيعية 1, 2, 3, 4, 5 زوجى 24135 فردى ، 41532 زوجى ، 53142 فردى و 52314 زوجى .

١٥- اكتب مجموعة تباديل الأعداد 1, 2, 3, 4 كاملة وبرهن أن نصفها زوجى والنصف الآخر فردى .

١٦- لنفرض أن a, b, c, d, e هي عناصر قطر مصفوفة مربعة من الدرجة الخامسة A . برهن ، بالاستفادة من (3.6) أنه إذا كانت A قطرية ، مثلثة علياً أو مثلثة دنياً ، فإنه يكون : $|A| = a b c d e$.

١٧- إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ برهن أن $AB \neq BA \neq A'B \neq AB' \neq A'B' \neq BA'$ ولكن محددة كل واحدة من حواصل الضرب هذه يساوى 4 .

١٨- برهن كافي المسألة (١) :

$$1- \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ب-} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{ج-} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

$$19- (1) \text{ برهن أن } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -4. \quad (2)$$

(ب) لرمز بالرمز $|B|$ المحددة التى تنتج عن $|A|$ بضرب عناصر عموده الثانى فى 5

احسب $|B|$ لتحقيق النظرية III

(ج) لرمز بـ $|C|$ المحددة التى تنتج عن $|A|$ بالمبادلة بين عموده الأول والثالث ، احسب $|C|$ لتحقيق النظرية V

$$(د) \text{ برهن أن } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ وهذا ما يحقق النظرية VIII}$$

(٥) نحصل على المحددة $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ من المحددة $|A|$ بطرح عناصر العمود الأول ثلاث مرات من العناصر

المقابلة لها من العمود الثالث . احسب $|D|$ لتحقق النظرية IX .

(و) اطرح ، في المحددة $|A|$ مرتين الصف الأول من الصف الثاني واطرح أربع مرات الصف الأول من الصف الثالث ثم احسب المحددة الناتجة .

(ر) في $|A|$ اضرب العمود الأول في 3 واطرح من الناتج العمود الثالث ثم برهن أن قيمة المحددة الناتجة تساوى ثلاثة أضعاف $|A|$ قارن مع (٥) لا تختلط بين (٥) و (ر) .

٢٠- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان k مقدارا عدديا فاستخدم (3.6) لتبرهن أن $|kA| = k^n |A|$.

٢١- برهن أنه (أ) إذا كان $|A| = k$ فإنه يكون $|\bar{A}| = \bar{k}$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة هرميتية تخالفية فإن $|A|$ إما أن تكون عددا حقيقيا أو عددا تخيليا بحتا .

٢٢- (أ) عدد المرات التي بادلنا فيها بين صفين (عمودين) متتاليين لنحصل على B من A في النظرية V وبذا تبرهن هذه النظرية .

(ب) قم بالأمر ذاته بالنسبة للنظرية VI .

٢٣- برهن النظرية VII إرشاد . بادل بين الصفين المتطابقين واستفد من النظرية V .

٢٤- برهن أنه إذا كانت عناصر أى صفين (عمودين) في مصفوفة مربعة A متناسبة فإن $|A| = 0$.

٢٥- استخدم النظريات VIII و III و VII لكي تبرهن النظرية IX .

٢٦- احسب المحددات الواردة في المسألة ١٨ مثل المحددات الواردة في المسألة ١١ .

٢٧- استخدم (3.6) لحساب $|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$ ربرهن بعد ذلك أن $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$ واستنتج أنه إذا كان

$A = \text{diag}(A_1, A_2)$ حيث A_1 و A_2 مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثانية ، فإن $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$.

٢٨- برهن أن المعامل المرافق لكل عنصر من $\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ هو هذا العنصر ذاته .

٢٩- برهن أن المعامل المرافق لعنصر من أى صف من $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هو العنصر المناظر من العمود الذى يحمل رقم الصف ذاته .

٣٠- برهن (أ) إذا كانت A متماثلة فإن $a_{ji} = a_{ij}$ عندما يكون $i \neq j$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n متماثلة تخالفية فإن $a_{ji} = (-1)^{n-1} a_{ij}$ عندما يكون $i \neq j$.

٣١- للمصفوفة A الواردة في المسألة ٨ :

(أ) برهن أن $|A| = 1$.

(ب) كون المصفوفة $C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ ربرهن أن $AC = I$.

(ج) وضح لماذا تكون نتيجة (ب) معروفة عندما تعرف نتيجة (أ) .

٣٢- اضرب أعمدة $|A| = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ عن الترتيب بالأعداد a, b, c احذف العامل المشترك في كل صف من الصفوف

$$|A| = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix} \quad \text{وبرهن أن :}$$

٣٣- برهن ، دون حساب قيمة المحددة أن

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

٣٤- برهن : أن المحددة المربعة من الدرجة n

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

٣٥- برهن

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)\} \{(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_2 - a_n)\} \dots \{a_{n-1} - a_n\}$$

$$\begin{vmatrix} na_1 + b_1 & na_2 + b_2 & na_3 + b_3 \\ nb_1 + c_1 & nb_2 + c_2 & nb_3 + c_3 \\ nc_1 + a_1 & nc_2 + a_2 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2 - n + 1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{٣٦- برهن بدون فك أن :}$$

$$\text{٣٧- برهن ، بدون فك أن المعادلة } \begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{جنراً يساوى الصفر .}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1} (na + b). \quad \text{٣٨- برهن .}$$

الفصل الرابع

حسابات المحددات

إن طرق حساب المحددات من الدرجة الثانية والثالثة مرت في الفصل الثالث . في المسألة رقم ١ في الفصل الثالث استخدمت النظرية IX لتوضيح كيفية : (١) الحصول على العنصر 1 أو 1 - كأحد عناصر المحددة إذا لم تكن المحددة تشمل مثل هذا العنصر . (ب) جعل عنصر من عناصر المحددة مساوياً للصفر .

في حالة المحددات ذات الدرجات الأعلى ، تقوم الطريقة العامة لحساب محددة ما على تكرار تطبيق النظرية IX من الفصل 3 بإحلال بدلا من المحددة المعطاة $|A|$ محددة أخرى $|B| = |b_{ij}|$ تتصف بكون كل عناصر صف (عمود) منها أصفاراً عدا واحد منها . فإذا كان b_{pq} هو العنصر غير المتلاشي وكان B_{pq} هو معاملة المرافق فإن :

$$|A| = |B| = b_{pq} \cdot B_{pq} = (-1)^{p+q} b_{pq}.$$

وبعد ذلك يعامل مصغر b_{pq} المعاملة ذاتها التي تعرضت لها المحددة الأصلية ونكرر هذه العملية حتى نصل إلى محددة من الدرجة الثانية أو الثالثة .

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix} \\ = -(-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

أنظر المسائل ١ - ٣

في حالة المحددات التي تحوى عناصر مشابهة للعناصر الواردة في محددة المثال ٢ - التالى فإنه يمكن استعمال الطريقة التالية :

مثال ٢ :

$$\begin{vmatrix} 0.921 & 0.185 & 0.476 & 0.614 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921 \begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921 \begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0 & 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0 & 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix} \\ = 0.921 \begin{vmatrix} 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0 & -0.320 & 1 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix} \\ = 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.309 & 0.265 & 0.217 \\ 0.492 & 0.757 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0.309 & 0.265 \\ 0.492 & 0.757 \end{vmatrix} \\ = 0.921(-0.384)(0.104) = -0.037$$

مفكوك لابلاس :

إن مفكوك محددة $|A|$ من الدرجة n على طول صف (عمود) منه هو حالة خاصة من طريقة لابلاس لفك المحددات ،
فبدلاً من أن نختار صفاً معيناً من $|A|$ لنتأثر m صفاً مرقفاً بـ i_1, i_2, \dots, i_m المرتبة بحسب كبرها . من هذه الصفوف
والتي عددها m يمكننا أن نحصل على

$$\rho = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} \quad \text{صغراً من الشكل} \quad \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$$

يأخذ كل الاختيارات الممكنة لـ m عموداً من أصل n عموداً ، وإذا استعملنا كل المصفوفات ومتماثلها الجبرية فإننا
نحصل على مفكوك لابلاس

$$|A| = \sum_p (-1)^s \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

حيث $s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$ ، حيث يمتد التجميع على كل الاختيارات ، التي عددها p ، لأدلة
الأعمدة التي تأخذ سب m دليلاً في كل اختيار .

مثال ٣ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{احسب} \quad \text{مستخدماً مصفوفات الصفين الأولين .}$$

$$|A| = (-1)^{1+2+1+2} |A_{1,2}^{1,2}| \cdot |A_{3,4}^{3,4}| + (-1)^{1+2+1+3} |A_{1,2}^{1,3}| \cdot |A_{3,4}^{2,4}| \quad (1.4)$$

$$+ (-1)^{1+2+1+4} |A_{1,2}^{1,4}| \cdot |A_{3,4}^{2,3}| + (-1)^{1+2+2+3} |A_{1,2}^{2,3}| \cdot |A_{3,4}^{1,4}|$$

$$+ (-1)^{1+2+2+4} |A_{1,2}^{2,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,3}| + (-1)^{1+2+3+4} |A_{1,2}^{3,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,2}|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16)$$

$$= -286$$

أنظر المسائل ٤ - ٦

محددة حاصل ضرب مصفوفتين : إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n فإن

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad (2.4)$$

أنظر المسألة ٧

فك محددة على طول صفها الأول وعمودها الأول : إذا كان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن

$$|A| = a_{11} \alpha_{11} - \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1} \quad (3.4)$$

حيث a_{11} العامل المرافق للعنصر a_{11} و a_{ij} المتتم الجبرى المصغر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ من A .

مشتقة محددة : لنفرض أن المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ لها عناصر دوال في المتغير x قابلة للتفاضل فيكون :

1 إن المشتقة $\frac{d}{dx} |A|$ للمحددة $|A|$ بالنسبة للمتغير x يساوى مجموع n محدة تنتج من المحددة $|A|$ بأن نستعوض ،
على التوالى ، عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير x .

مثال ٤ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5 \end{aligned}$$

أنظر المسألة ٨

مسائل محلولة

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7-2(2) & 4-2(3) & -3-2(-2) & 10-2(4) \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -286$$

(أنظر المثال ١)

يوجد طبعاً ، طرق كثيرة أخرى للحصول على العنصر $+1$ أو -1 — فيمكننا مثلاً أن نطرح العمود الأول من الثانى ،
العمود الرابع من الثانى ، الصف الأول من الثانى ، وهكذا

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2(1) \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-2(2) \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-2(2) \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(4) & 4-2(4) & -6-2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1-3(4) & 8-3(4) & -9-3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -72 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix} \quad \text{٣ - احسب}$$

لنضرب الصف الثانى $1+i$ والصف الثالث $1+2i$ فنجد :

$$\begin{aligned} (1+i)(1+2i)|A| &= (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6 + 18i \end{aligned}$$

ويكون $|A| = 6$

٤ - استنتج مفكوك لابلاس للمحددة $|A| = |a_{ij}|$ المربعة من الدرجة n باستعمال مصفورات من درجة $m < n$

اعتبر المصفر $\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ من الدرجة m للمحددة $|A|$ حيث رتبنا أرقام الصفوف والأعمدة بحسب كبرها.

الآن وبإجراء $i_1 - 1$ من المبادلات بين صفين متتاليين من صفوف $|A|$ فإن الصف ذا الرقم i_1 يمكن أن يحتل الصف الأول وبعد $i_2 - 2$ من المبادلات بين صفين متتاليين يمكننا أن نجعل الصف ذا الرقم i_2 في موضع الصف الثاني

ثم بعد $i_m - m$ من المبادلات بين صفين متتاليين يقع الصف ذو الرقم i_m في موضع الصف ذي الرقم m أى بعد $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_m - m) = i_1 + i_2 + \dots + i_m - \frac{1}{2}m(m+1)$ من المبادلات بين صفين متتاليين تحتل

الصفوف ذوات الأرقام j_1, j_2, \dots, j_m مواضع الصفوف m الأول . وبالشكل ذاته نتوصل بعد $j_1 + j_2 + \dots + j_m - \frac{1}{2}m(m+1)$ مبادلة بين عمودين متتاليين إلى أن تقع الأعمدة . ذات الأرقام i_1, i_2, \dots, i_m في مواضع

الأعمدة الـ m الأول وهكذا ونتيجة للمبادلات المنبئة أعلاه بين الصفوف المتتالية والأعمدة المتتالية فإن المصفر المختار يحتل الركن الأعلى الأيسر ويحتل متممه الجبرى الركن الأسفل الأيمن من المحدد المفروض . علاوة على ذلك تكون المحددة

$|A|$ قد غيرت إشارتها $\sigma = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m - m(m+1)$ مرة وهذا يعادل

$s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$ تغييراً في الإشارة لهذا .

يعطى $m!(n-m)!$ حداً من $(-1)^s |A|$ أو

$$(-1)^s \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (a)$$

يعطى $m!(n-m)!$ حداً من $|A|$

لنفرض أن الأعداد i_1, i_2, \dots, i_m قد ثبتت ويمكننا أن نختار من هذه الصفوف $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}$

من المصفورات المربعة ذوات الدرجة m المختلفة . يعطى كل واحدة من هذه المصفورات بعد أن

ي ضرب بمتممه الجبرى $(-1)^s$ حداً من حدود المحددة $|A|$ ونظراً لطريقة تكوينهم فإنه لا يوجد تكرار لحدود المحددة

$|A|$ بين حواصل الضرب هذه لذلك

$$|A| = \sum_{\sigma} (-1)^s \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix}$$

حيث $s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$ وحيث يمتد التجميع على الاختيارات المختلفة لأدلة الأعمدة j_1, j_2, \dots, j_m التى عددها p .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{٥ - احسب} \quad |A| \text{ باستعمال مصفورات العمودين الأولين .}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

٦ - إذا كانت C, B, A ثلاث مصفورات مربعة من الدرجة n فاثبت أن :

$$|P| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

من الـ n صفا الأول من $|P|$ ، يمكن تكوين مصفر واحد $|A|$ مربع غير صفري من الدرجة n ويكون متممه الجبرى هو $|B|$. وينتج عن هذا باستخدام مفكوك لابلاس ، $|P| = |A| \cdot |B|$ ،
 γ - أثبت أن : $|AB| = |A| \cdot |B|$

لتفرض أن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان مربعتان من الدرجة n ولتكن $C = [c_{ij}] = AB$ بحيث يكون $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ من المسألة ٦ .

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

لنصف إلى العمود ذى الرقم $(n+1)$ من $|P|$ العمود الأول مضروباً في b_{11} العمود الثانى مضروباً في b_{21} ، ، ، ، ، العمود ذا الرقم n مضروباً في b_{n1} فنجد :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ثم نصف إلى العمود ذى الرقم $(n+2)$ من $|P|$ العمود الأول مضروباً في b_{12} والعمود الثانى مضروباً في b_{22} ، ، ، ، ، والعمود ذا الرقم n مضروباً في b_{n2} فنجد :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

بالاستمرار في هذه العملية نجد في النهاية $|P| = \begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$ من الصفوف الـ n الأخيرة من $|P|$ يمكن تكوين مصفر مربع واحد فقط غير متلاش من الدرجة n من الشكل $(-1)^n \cdot |-I_n|$ متممه الجبرى $|C| = (-1)^{n(2n+1)}|C| = |C|$ ومه $(-1)^{1+2+\dots+n+(n+1)+\dots+2n} = (-1)^{n(2n+1)}$ و
 $|C| = |AB| = |A| \cdot |B|$.

٨ - لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ حيث $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, دوال قابلة للتفاضل بالنسبة للمتغير x فيكون :

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

وإذا رمزنا لـ $\frac{d}{dx}(a_{ij})$ بالرمز a'_{ij} فإننا نجد :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|A| &= a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{22}a_{11}a_{33} + a'_{33}a_{11}a_{22} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{23}a_{12}a_{31} + a'_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad + a'_{13}a_{32}a_{21} + a'_{32}a_{13}a_{21} + a'_{21}a_{13}a_{32} - a'_{11}a_{23}a_{32} - a'_{23}a_{11}a_{32} - a'_{32}a_{11}a_{23} \\ &\quad - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{21}a_{12}a_{33} - a'_{33}a_{12}a_{21} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{22}a_{13}a_{31} - a'_{31}a_{13}a_{22} \\ &= a'_{11}a_{11} + a'_{12}a_{12} + a'_{13}a_{13} + a'_{21}a_{21} + a'_{22}a_{22} + a'_{23}a_{23} + a'_{31}a_{31} + a'_{32}a_{32} + a'_{33}a_{33} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

انظر المسألة ١٠ من الفصل ٣

مسائل اضافية

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304 \quad \text{جـ} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156 \quad \text{أ - احسب ما يلي :}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118 \quad \text{د -} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 41 \quad \text{ب -}$$

١٠ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن أن $|A^T A|$ عدد حقيقي غير سالب .

١١ - احسب المحددة الواردة في المسألة رقم ٩ (أ) مستخدماً مصفورات من الصفين الأولين ثم باستعمال مصفورات العمودين الأولين .

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{ليكن (١) - ١٢}$$

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)^2 \quad \text{لتبرهن صحة العلاقة} \quad |AB| = |A| \cdot |B| \quad \text{استخدم العلاقة}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 + ib_3 & b_2 + ib_4 \\ -b_2 + ib_4 & b_1 - ib_3 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_1 + ia_3 & a_2 + ia_4 \\ -a_2 + ia_4 & a_1 - ia_3 \end{bmatrix} \quad \text{ليكن (ب)}$$

استفد من العلاقة $|AB| = |A| \cdot |B|$ لتبرهن عن $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$ مجموع أربعة مربعات .

الجواب 720-

$$13 - \text{احسب} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

مستعملا مصفورات من الصفوف الثلاثة الأولى .

الجواب 2

$$14 - \text{احسب} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

مستعملا مصفورات من الصفين الأولين .

١٥ - إذا كان A_1, A_2, \dots, A_5 مصفوفات مربعة استعمل طريقة لابلاس في فك المحددات لإثبات .

$$|\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_5)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_5|$$

$$16 - \text{فك} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

استخدما مصفورات من الصفين الأولين لإثبات أن :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

١٧ - استعمل طريقة لابلاس في فك المحددات وبرهن أن المحددة $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$ ذات الدرجة n حيث 0 مصفوفة مربعة من

الدرجة k تساوى الصفر عندما يكون $k < \frac{1}{2}n$.

١٨ - فك كل من المعاملات المرافقة $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ في $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14}$ على طول العمود الأول لكل منهما لتبيان

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1}$$

$$\text{حيث } \alpha_{1j}^{i1} \text{ هو المتمم الجبرى للمصفر } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} \text{ من } |A|$$

١٩ - إذا رمزنا بالرمز α_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n فبرهن أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j \alpha_{ij}$$

إرشاد: استخدم (3.4)

٢٠- احسب مشتقة كل من المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix} \quad - \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix} \quad - \quad \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$1 - 6x + 21x^2 + 12x^3 - 15x^4 \quad - \quad 2x + 9x^2 - 8x^3 \quad - \quad \text{الجواب أ -}$$

$$6x^5 - 5x^4 - 28x^3 + 9x^2 + 20x - 2 \quad - \quad \text{ب -}$$

٢١- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين حقيقيتين من الدرجة a حيث A مصفوفة غير شاذة وإذا كان

$$H = A + iB \quad \text{مصفوفة هيرميتية ، فإن :}$$

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot |I + (A^{-1}B)^2|$$

الفصل الخامس

التكافؤ

رتبة مصفوفة :

نقول عن مصفوفة A غير صفيرية إنها ذات رتبة r إذا كان على الأقل أحد مصغراتها المربعة من الدرجة r غير متلاشية وكان كل مصغر من الدرجة $(r + 1)$ هذه المصفوفة ، يساوى الصفر . إن رتبة المصفوفة الصفيرية هي صفر .

مثال ١ : إن رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ هي $r = 2$ لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ بينما $|A| = 0$

انظر المسألة ١

نقول عن مصفوفة مربعة A درجتها n ، إنها غير شاذة إذا كانت رتبها $r = n$ أى إذا كان $|A| \neq 0$ أما في الحالة المعاكسة فإننا نسمى A مصفوفة شاذة . ان مصفوفة المثال رقم ١ هي مصفوفة شاذة .

من العلاقة $|AB| = |A| \cdot |B|$ ينتج :

١ — أن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من المصفوفات غير الشاذة وذات الدرجة n هو مصفوفة غير شاذة وأن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من المصفوفات المربعة من درجة n هو مصفوفة شاذة فيما إذا كان على الأقل ، واحد من هذه المصفوفات شاذًا .

التحويلات الأولية :

إن العمليات التالية والمسماة تحويلات أولية ، لا تغير في درجة أو رتبة مصفوفة .

(١) المبادلة بين الصفين ذوى الرقبن i و j ويرمز لهذه العملية بالرمز H_{ij} المبادلة بين العمودين ذوى الرقبين i و j ويرمز لهذه العملية بالرمز K_{ij} .

(٢) ضرب كل عنصر من عناصر الصف ذى الرقم i بعدد k لا يساوى الصفر ، ويرمز لهذه العملية بالرمز $H_i(k)$ ،

ضرب كل عنصر من عناصر العمود ذى الرقم i بعدد k لا يساوى الصفر ، ويرمز لهذه العملية بالرمز $K_i(k)$ ،

(٣) الإضافة إلى عناصر الصف ذى الرقم i العناصر المقابلة لها من الصف ذى الرقم j مضروبة بالمقدار العددي k ويرمز لهذه العملية بالرمز $H_{ij}(k)$ الإضافة إلى عناصر العمود ذى الرقم i العناصر المقابلة من العمود ذى الرقم j مضروبة بالمقدار العددي k ويرمز لهذه العملية بالرمز $K_{ij}(k)$.

إن التحويلات التى رمزنا لها بالرمز H تدعى **تحويلات صفوف أولية** وإن التحويلات التى رمزنا لها بالرمز K فإنها تدعى **تحويلات أعمدة أولية** .

إن من الواضح أن تحويلًا أوليًا لا يغير في درجة مصفوفة . ويبرهن في المسألة ٢ ، أنه لا يغير أيضًا في رتبة هذه المصفوفة .

معكوس تحويل أولي :

إن معكوس تحويل أولي هو عملية تلاشى تأثير هذا التحويل الأولي أى إذا أخضمتنا A لتحويل أولي ثم أخضمتنا المصفوفة الناتجة للتحويل الماكس لهذا التحويل ، فإن الناتج الأخير هو المصفوفة A نفسها .

مثال ٢ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ليكن (١)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{إن تأثير التحويل الأول للصفوف } H_{21}(-2) \text{ يؤدي إلى 3.}$$

أما تأثير التحويل الأول للصفوف $H_{21}(+2)$ على B فإنه يؤدي إلى A مرة ثانية .

لهذا فإن التحويلين $H_{21}(-2)$ و $H_{21}(+2)$ هما تحويلان أوليان عكسيان للصفوف
إن التحويلات الأولية العكسية هي :

$$H_{ij}^{-1} = H_{ij} \quad K_{ij}^{-1} = K_{ij} \quad (١)$$

$$H_i^{-1}(k) = H_i(1/k) \quad K_i^{-1}(k) = K_i(1/k) \quad (٢)$$

$$H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(-k) \quad K_{ij}^{-1}(k) = K_{ij}(-k) \quad (٣)$$

وعلى ذلك يتضح :

II أن عكس تحويل أول هو تحويل أول من نفس النوع .

المصفوفات المتكافئة :

نقول عن مصفوفتين A و B إنها متكافئتان $A \sim B$ إذا أمكن الحصول على إحداها من الأخرى بإجراء تحويلات أولية متتابعة .

مثال ٣ :

إذا أجرينا التحويلات $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$ فإننا نجد :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

حيث أن جميع مصفورات B ذات الدرجة 3 متلاشية بينما $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ إذن رتبة B تساوي 2 لذلك تكون رتبة A مساوية 2 أيضا . يمكن مقارنة طريقة الحصول على رتبة المصفوفة A وذلك بالحصول على مصفوفة مكافئة B يمكن معرفة رتيبها بمجرد النظر بطريقة حساب مختلف مصفورات A لتحديد رتبته .

انظر المسألة ٣

التكافؤ بالصفوف إذا حولت المصفوفة A إلى المصفوفة B باستعمال تحويلات أولية للصفوف فإننا نقول إن B مكافئة بالصفوف للمصفوفة A وبالعكس . إن المصفوفتين A و B الواردتين في المثال ٣ متكافئتان بالصفوف .

إن أى مصفوفة غير صفرية A رتيبها r تكافؤ بالصفوف مصفوفة قانونية C يكون فيها :

(١) واحد أو أكثر من عناصر كل صف من الصفوف الـ r الأولى غير صفرية بينما لا تحوى بقية الصفوف سوى عناصر صفرية .

(ب) إن العنصر الأول الغير صفري في الصف الذي رقمه i حيث $(i=1,2,...,r)$ يساوى 1؛ وليكن رقم العمود الذى يقع فيه هذا العنصر j_i .

$$(ج) \quad j_1 < j_2 < \dots < j_r.$$

(د) إن العنصر الوحيد الغير صفري في العمود الذى الرقم j_i حيث $(i=1,2,...,r)$ هو العنصر 1 من الصف الذى الرقم i . لتحويل A إلى C نفرض أن j_1 هو رقم أول عمود غير صفري من A .

(i₁) إذا كان $a_{ij_1} = 0$ فاستعمل $H_1(1/a_{1j_1})$ لجعل هذا العنصر 1 عندما يكون ذلك ضروريا.

(i₂) إذا كان $a_{ij_1} = 0$ لكن $a_{pj_1} \neq 0$ استعمل H_{1p} ثم افعل ما فعلت في (i₁).

(ii) استعمل تحويلات الصفوف من النوع (٣) بضرب الصف الأول بعدد مناسب لنحصل على أصفار في المواقع الأخرى من العمود الذى الرقم j_1 .

إذا ظهرت عناصر غير صفرية في الصف الأول فقط من المصفوفة الناتجة B ، فإنه يكون $B = C$ وإذا كان غير ذلك فلنفرض أن j_2 رقم أول عمود لا يقع فيه هذا الأمر. إذا كان $b_{2j_2} \neq 0$ فاستعمل $H_2(1/b_{2j_2})$ كما في (i₁) وإذا كان $b_{2j_2} = 0$ بينما $b_{qj_2} \neq 0$ فاستعمل H_{2q} واتبع نفس ما تم في (i₁). ويكون عددنا كما في (ii) العمود ذو الرقم j_2 خاليا من أى عنصر آخر غير صفري.

إذا ظهرت عناصر غير صفوية في المصفوفة الناتجة في الصفين الأولين فقط، فإننا نحصل على المصفوفة C . أما إذا لم يتحقق ذلك فإننا نكرر العملية السابقة حتى نحصل على المصفوفة C .

مثال ٤ : إذا أجريت تحويلات الصفوف $H_{21}(-2), H_{31}(1), H_2(1/5), H_{12}(1), H_{32}(-5)$ بالتتابع على

A من المثال ٣ فإننا نحصل على ما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= C$$

وهي مصفوفة لها الخواص (١) - (د)

أنظر المسألة ٤

الشكل العادى لمصفوفة :

يمكن اختزال أى مصفوفة A رتبها $r > 0$ بواسطة تحويلات أولية إلى إحدى الصور التالية :

$$I_r, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [I_r \ 0], \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

التي تسمى الشكل العادى (النظامى) للمصفوفة A . إن المصفوفة الصفرية هي الشكل العادى الخاص بها.

حيث أنه يمكن استخدام تحويلات الصفوف وتحويلات الأعمدة في وقت واحد فإن العنصر 1 من الصف الأول الذى حصلنا عليه في البند الوارد أعلاه، يمكن وضعه في العمود الأول. ومن الممكن عندها أن يكون كل من الصف الأول والعمود الأول خاليا من عناصر أخرى غير صفرية (متلاشية). وبنفس الطريقة يمكن وضع العنصر 1، من الصف الثانى، في العمود الثانى وهكذا.....

فتلا، إن إجراء التحويلات المتتابعة $H_{21}(-2), H_{31}(1), K_{21}(-2), K_{31}(1), K_{41}(-4), K_{23}, K_2(1/5),$

$H_{32}(-1), K_{42}(3)$ على A الواردة في المثال ٣ يعطى $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وهو الشكل العادى.

أنظر المسألة ٥

المصفوفات الأولية :

إن المصفوفة الناتجة عن تطبيق تحويل صفوف (تحويل أعمدة) على مصفوفة الوحدة I_n تدعى مصفوفة صفية (أعمدة) أولية. سنرمز للمصفوفة الأولية بنفس الرمز الذي استخدم للتعبير عن التحويلة الأولية التي استخدمت للحصول على المصفوفة.

مثال ٥ :

$$\text{أمثلة من المصفوفات الأولية الناتجة عن } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هي :}$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12}, \quad H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k), \quad H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

كل مصفوفة أولية هي مصفوفة غير شاذة (لماذا ؟).

يمكن الحصول على تأثير تحويل أولى على المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ ، بضرب هذه المصفوفة بمصفوفة أولية.

لإجراء تحويل أولى معين للصفوف على مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ ، قم بهذا التحويل على I_m لإيجاد المصفوفة الأولية المناظرة H ثم اضرب A من اليسار بالمصفوفة H .

لإجراء تحويل أولى للأعمدة على A ، قم بهذا التحويل على I_n للحصول على المصفوفة الأولية المناظرة K ثم اضرب A من اليمين بالمصفوفة K .

مثال ٦ :

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ فإن العملية $H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ تبادل بين الصفين الأول والثالث

والثالث في A : أما العملية $AK_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ فإنها تصيف إلى العمود الأول من A مضاعف العمود الثالث.

لتكن A و B مصفوفتين متكافئتين ، ولنرمز للمصفوفات الصفية والعمودية الأولية ، المناظرة للتحويلات الأولية للصفوف والأعمدة التي تحول المصفوفة A إلى B ، بالرموز $H_1, H_2, \dots, H_s; K_1, K_2, \dots, K_t$ حيث H_1 هو التحويل الأول للصفوف ، H_2 التحويل الثاني للصفوف ، K_1 التحويل الأول للأعمدة ، K_2 التحويل الثاني للأعمدة ويكون عندئذ :

$$H_s \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t = PAQ = B \quad (5.2)$$

$$Q = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \quad \text{و} \quad P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad \text{حيث} \quad (5.3)$$

ونجسد :

III تكون مصفوفتا A و B متكافئتين إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن إيجاد مصفوفتين غير شاذتين P و Q المعرفتين في (5.3) بحيث يكون $PAQ = B$

مثال ٧ :

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3(\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن :} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B
 \end{aligned}$$

بما أن كل مصفوفة متكافئة لشكلها العادي فإنه يكون :

IV إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وغير شاذة فإنه يوجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q معرفتان

في (5.3) وتحققان العلاقة $PAQ = I_n$

أنظر المسألة ٦

معكوس حاصل ضرب المصفوفات الأولية : ليكن

$$Q = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \quad P = H_s \dots H_2 \cdot H_1$$

كما في (5.3) . بما أن لكل من H و K معكوس وبما أن معكوس حاصل الضرب هو حاصل ضرب المعكوسات

بترتيب معاكس فإنه يكون :

$$Q^{-1} = K_t^{-1} \dots K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} \quad \text{و} \quad P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \dots H_s^{-1} \quad (5.4)$$

نفرض أن A مصفوفة مربعة غير شاذة من الدرجة n ولتكن P و Q المصفوفتين المعرفتين سابقا واللتين تحققان

العلاقة $PAQ = I_n$ فيكون عندئذ :

$$A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1} \quad (5.5)$$

ونكون بذلك قد برهنا :

V. يمكن التعبير عن كل مصفوفة غير شاذة كحاصل ضرب مصفوفات أولية .

أنظر المسألة ٧

وينتج مما سبق ما يلي :

VI. إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن رتبة حاصل الضرب AB (حاصل الضرب BA أيضا) ، تكون مساوية لرتبة B .

VII. إذا كانت P و Q مصفوفتين غير شاذتين فإن رتبة PAQ تكون مساوية إلى رتبة A .

المجموعة القانونية المتكافئة :

نبرهن في المسألة ٨ :

VIII. تكون المصفوفتان A و B من الدرجة $m \times n$ متكافئتين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة .

نسى مجموعة المصفوفات من درجة $m \times n$ بأنها مجموعة قانونية تكافئية فيما إذا كانت كل مصفوفة من

الدرجة $m \times n$ مكافئة لمصفوفة واحدة وواحدة فقط من المجموعة . إن مثل هذه المجموعة القانونية تحدد بالعلاقة

(5.1) حيث r تأخذ إما القيم $1, 2, \dots, m$ وإما القيم $1, 2, \dots, n$ حسبما تكون m أصغر من n أو بالعكس .

أنظر المسألة ٩

رتبة حاصل الضرب :

لتكن المصفوفة A من درجة $m \times p$ والرتبة r . يوجد ، استنادا إلى النظرية III ، مصفوفتان غير شاذتين

P و Q تحققان العلاقة :

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أى $A = P^{-1} N Q^{-1}$ لتكن B مصفوفة من درجة $p \times n$ ولننظر في رتبة :

$$AB = P^{-1} N Q^{-1} B \quad (5.6)$$

استنادا إلى النظرية VI تكون رتبة AB هي رتبة $NQ^{-1}B$. وعلى ذلك فإن صفوف $NQ^{-1}B$ تكون من الصفوف الأولى من $Q^{-1}B$ و $m-r$ صفها مكونا من أصفار ، أى أن رتبة AB لا يمكنها أن تزيد عن r ، رتبة المصفوفة A . وبالمثل فإن رتبة AB لا يمكنها أن تزيد عن رتبة B . ونكون بذلك قد برهنا :

IX. إن رتبة حاصل ضرب مصفوفتين لا يمكن أن تزيد عن رتبة أى من مضروبيته .

لنفرض أن $AB = 0$ تنتج عن (5.6) إن $NQ^{-1}B = 0$. إن هذا يتطلب أن تكون الصفوف الأولى من $Q^{-1}B$ أصفارا بينما تكون بقية الصفوف اختيارية . أى أن رتبة $Q^{-1}B$ ورتبة B لا يمكن أن تزيد عن $(p-r)$ ونكون قد برهنا النظرية التالية :

X. إذا كانت رتبة مصفوفة A درجتها $m \times p$ مساوية r وإذا كانت B مصفوفة درجتها $p \times n$ وتحقق العلاقة $AB = 0$ فإن رتبة B لا تزيد عن $(p-r)$.

مسائل محلولة

١- (أ) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ تساوى 2 لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ ولأنه لا يوجد مصفورات من الدرجة الثالثة .

(ب) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ تساوى 2 لأن $|A| = 0$ و $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

(ج) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ تساوى 1 لأن $|A| = 0$ ولأن المصفورات التسعة من الدرجة الثانية متلاشية

وليس كل عناصر هذه المصفوفة أصفارا .

٢- برهن أن التحويلات الأولية لا تغير في رتبة المصفوفة .

لن نتبر هنا إلا تحويلات الصفوف ونترك كتمرين اعتبار تحويلات الأعمدة ، لتكن r رتبة المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ لذلك تكون كل مصفورات A ذات الدرجة $(r+1)$ أصفارا ولتكن B المصفوفة الناتجة عن A بتحويل الصفوف . لرمز بالرمز $|R|$ لمصفور من الدرجة $(r+1)$ للمصفوفة A وبالرمز $|S|$ لمصفور من الدرجة $(r+1)$ للمصفوفة B له نفس وضع $|R|$.

ليكن تحويل الصفوف هو (H_{ij}) إن تأثير هذا التحويل على $|R|$ أما (i) تركه بدون تغير وأما (ii) المبادلة بين اثنتين من صفوفه أو (iii) المبادلة بين واحد من صفوفه وصف آخر لا يقع في $|R|$. في الحالة (i) يكون $|S| = |R| = 0$; وفي الحالة (ii) يكون $|S| = |R| = 0$ أما في الحالة (iii) فإن $|S|$ ياهمال الإشارة يكون مصفورا آخر من مصفورات $|A|$ من درجة $(r+1)$ وبالتالي يكون مساويا للمصفور .

ليكن التحويل الصفوى $H_i(k)$ أن تأثير هذا التحويل على $|R|$ هو إما (i) أن يتركه بدون تغير وإما (ii) أن يضرب أحد صفوفه بالعدد k . ويكون على التوالي $|S| = |R| = 0$ أو $|S| = k|R| = 0$.

ليكن التحويل الصفوى هو $H_{ij}(k)$ أن مفعول هذا التحويل على $|R|$ هو إما (i) أن يتركه كما هو وإما (ii) أن يضيف إلى أحد صفوفه صفا آخر منه مضروبا بالعدد k أو (iii) أن يضيف إلى أحد صفوفه

صفا آخر ، لا يقع في $|R|$ مضروباً بالعدد k . في الحالتين (i) و (ii) يكون $|S| = |R| = 0$ أما في الحالة (iii) فإنه يكون $|S| = |R| \pm k$ (مصفراً آخر من مصفورات A ذات الدرجة $(r+1)$) $0 = k \cdot 0 \pm 0 = 0$ مما تقدم يتضح ، أنه لا يمكن لتحويل صفوف أن يرفع رتبة مصفوفة كما أنه لا يمكن لهذا التحويل أن يخفض رتبة هذه المصفوفة لأنه لو حدث ذلك لرفع التحويل المعاكس رتبة المصفوفة ويمكننا أن نقول باختصار إن تحويل أوليا للصفوف لا يغير في رتبة المصفوفة التي يقع عليها هذا التحويل .

٣- أوجد مصفوفة مكافئة B لكل واحدة من المصفوفات A الواردة فيما بعد ثم استنتج بالنظر رتبة A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B \quad (1)$$

إن التحويلات المستعملة هي على التوالي من اليسار إلى اليمين : $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$; $H_2(-1/3)$, $H_3(-1/4)$; $H_{32}(-1)$. ونجد أن رتبة A هي 3 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \quad (ب)$$

رتبة A هي 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & i & 1+2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \quad (ج)$$

رتبة A هي 2

ملاحظة :

إن المصفوفات المكافئة B التي حصلنا عليها هنا ليست وحيدة . بصورة خاصة لم تستعمل في (1) و (ب) سوى تحويلات صفوف ويمكن للقارئ أن يجد مصفوفات أخرى فيما لو استعمل تحويلات أعمدة . عندما تكون العناصر أعداداً كسرية لا يكون هناك على وجه العموم أى كسب ينتج عن استخدام تحويلات صفوف وتحويلات أعمدة سوياً .

٤- أوجد المصفوفة القانونية C والمكافئة صفياً لكل مصفوفة A من المصفوفات الواردة أدناه :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C \quad - 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = C \quad - 2$$

٥ - اختزل كلا من المصفوفات الواردة أدناه إلى شكلها العادي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$= [I_3 \ 0]$$

إن التحويلات الأولية المستعملة مرتبة من اليسار إلى اليمين هي :

$$H_{21}(-3), H_{31}(2); K_{21}(-2), K_{41}(1); K_{23}; H_{32}(-2); K_{32}(2), K_{42}(-5); K_3(1/11), K_{43}(7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن التحويلات الأولية المستعملة ، مرتبة من اليسار إلى اليمين هي :

$$H_{12}; K_1(\frac{1}{2}); H_{31}(-2); K_{21}(-3), K_{31}(-5), K_{41}(-4); K_2(\frac{1}{2}); K_{32}(-3), K_{42}(-4); H_{32}(-1)$$

٦ - اختزل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ إلى شكلها العادي N واحسب المصفوفتين P_1 و Q_1 بحيث تتحقق العلاقة $P_1 A Q_1 = N$.

بما أن A من الدرجة 3×4 فإن علينا أن نعمل على الشكل $\begin{matrix} I_4 \\ A \\ I_3 \end{matrix}$.
يجرى كل تحويل صفوف على صف مكون من سبعة عناصر كما يجرى كل تحويل أعمدة على عمود ذي سبعة عناصر .

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1/3 & -3 & 2 & 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1/3 & -3 & 2 & 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Q_1

أو

$N \ P_1$

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ حيث}$$

٧- عبر عن $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ كحاصل ضرب مصفوفات أولية :

نختزل التحويلات الأولية $H_{21}(-1), H_{31}(-1); K_{21}(-3), K_{31}(-3)$ مرتبة من اليسار إلى اليمين ، المصفوفة A إلى المصفوفة I_3 أى [أنظر (5.2)].

$$I = H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 = H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-1) \cdot A \cdot K_{21}(-3) \cdot K_{31}(-3)$$

ينتج من (5.5) أن : $A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٨- برهن ما يلي : تكون المصفوفتان A و B من الدرجة $m \times n$ متكافئتين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة .

إذا كانت رتبتي A و B متساويتين فإنهما تكافئان نفس المصفوفة (5.1) وتكون كل واحدة منها مكافئة للآخرى . على العكس إذا كانت A و B متكافئتين ، فإنه توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون : $B = P A Q$ واستنادا إلى النظرية VII تكون للمصفوفتين A و B نفس الرتبة .

٩- تتكون المجموعة القانونية لمصفوفة غير صفرية من الدرجة الثالثة ما يلي :

$$I_3, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتتكون المجموعة القانونية لمصفوفة غير صفرية درجتها 3×4 ما يلي :

$$[I_3 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

١٠- إذا اخترنا من مصفوفة مربعة A من الدرجة n والرتبة r_A مصفوفة جزئية B مكونة من s صفا (عمودا) فإن r_B رتبة B تساوى أو تزيد عن $r_A + s - n$.

إن الشكل العادى للمصفوفة A يكون له $(n - r_B)$ صفا عناصره أصفار وإن الشكل العادى للمصفوفة B يكون له $(s - r_B)$ صفا عناصره أصفارا ومن الواضح أن :

$$n - r_A \geq s - r_B$$

ومنها $r_B \geq r_A + s - n$ كما هو مطلوب .

مسائل إضافية

١١- أوجد رتبة كل من المصفوفات : (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

الجواب : (أ) 2 ، (ب) 3 ، (ج) 4 ، (د) 2

- ١٢- برهن باعتبار المصفورات أن المصفوفات A و A' و A و A' نفس الرتبة .
 ١٣- برهن أن المصفوفة القانونية C المكافئة صفيا لمصفوفة معينة A تتحدد تحديدا تاما بواسطة A فقط .
 ١٤- أوجد المصفوفة القانونية C المكافئة صفيا لكل من المصفوفات التالية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (هـ) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (د)$$

١٥- اكتب الشكل العادي لكل من مصفوفات المسألة ١٤ .

الجواب : (ا) $[I_2 \ 0]$ ، (ب) ، (ج) $[I_3 \ 0]$

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ١٦- لتكن المصفوفة$$

- (ا) من I_3 كون $H_{12}, H_2(3), H_{13}(-4)$ ثم برهن أن كل HA يعطى ناتج تحويل الصفوف المناظر .
 (ب) من I_4 كون $K_{24}, K_3(-1), K_{42}(3)$ ثم برهن أن كل AK يعطى ناتج تحويل الأعمدة المناظرة .
 (ج) اكتب المكموسات $H_{12}^{-1}, H_2^{-1}(3), H_{13}^{-1}(-4)$ للمصفوفات الأولية الواردة في (ا) وبرهن أنه لكل H يتحقق $H \cdot H^{-1} = I$.
 (د) اكتب المكموسات $K_{24}^{-1}, K_3^{-1}(-1), K_{42}^{-1}(3)$ للمصفوفات الأولية الواردة من (ب) وبرهن أنه لكل K يتحقق $KK^{-1} = I$.

$$C = H_{13}^{-1}(-4) \cdot H_2^{-1}(3) \cdot H_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad B = H_{12} \cdot H_2(3) \cdot H_{13}(-4) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (هـ) \text{ احسب}$$

$$B \cdot C = C \cdot B = I \quad (و) \text{ برهن أن}$$

- ١٧- (ا) برهن أن $K'_{ij} = H_{ij}$ و $K'_i(k) = H_i(k)$ و $K'_{ij}(k) = H_{ij}(k)$.
 (ب) برهن أنه إذا كان R حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية ، فإن R' حاصل ضرب بترتيب معاكس ، لنفس مصفوفات الصفوف الأولية .

١٨- برهن ما يلي : (ا) يكون كل من AB و BA غير شاذا فيما إذا كانت A و B مصفوفتين غير شاذتين مربعتين من الدرجة n .

(ب) يكون كل من AB و BA شاذ فيما إذا كانت على الأقل واحدة من المصفوفتين A و B المربعتين ومن الدرجة n ، شاذة .

١٩- إذا كانت A و Q غير شاذتين فبرهن أن A ، PA و AQ و PAQ تكون لها نفس الرتبة .

توضيح : اكتب P و Q كحاصل ضرب مصفوفات أولية .

٢٠- اختزل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ إلى شكل عادي N واحسب المصفوفتين P_2 و Q_2 اللتين تحققان العلاقة $P_2 B Q_2 = N$.

٢١- (أ) برهن أن عدد المصفوفات في مجموعة قانونية لمصفوفة مربعة من الدرجة n بالنسبة للتكافؤ، يساوي $(n+1)$
(ب) برهن أن عدد المصفوفات، في مجموعة قانونية لمصفوفة درجتها $m \times n$ بالنسبة للتكافؤ، يساوي أصغر العددين $(m+1)$ و $(n+1)$.

٢٢- إذا أعطيت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ والتي رتبها 2، فأوجد مصفوفة مربعة من الدرجة الرابعة $B \neq 0$ وتحقق العلاقة $AB = 0$ وتوضيح : اتبع برهان النظرية X وخذ:

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

حيث a, b, \dots, h أعداد اختيارية.

٢٣- المصفوفتان A من المسألة ٦ و B من المسألة ٢٠ متكافئتان. أوجد P و Q بحيث يكون $B = P A Q$.

٢٤- إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ورتبها r_A ، B مصفوفة من نفس الدرجة ورتبها r_B فبرهن أن رتبة المصفوفة $A + B$ لا تزيد عن $r_A + r_B$.

٢٥- لتكن A مصفوفة اختيارية مربعة ومن الدرجة n و B مصفوفة أولية مربعة ومن الدرجة n أيضا. باعتبار كل من الصور الستة المختلفة للمصفوفة B فأثبت أن $|AB| = |A| \cdot |B|$.

٢٦- نفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة n .

(أ) إذا كانت واحدة، على الأقل منها شاذة نبرهن أن $|AB| = |A| \cdot |B|$.

(ب) إذا كانتا معا غير شاذتين، استخدم (5.5) والمسألة (٢٥) لكي نبرهن أن $|AB| = |A| \cdot |B|$.

٢٧- برهن أن تكافؤ المصفوفات علاقة تكافؤ.

٢٨- برهن أن الشكل الصفي التكافؤي القانوني لمصفوفة غير شاذة A هو I والعكس بالعكس.

٢٩- برهن أنه لا يمكن تحويل كل مصفوفة A إلى شكل عادي بواسطة تحويلات صفوف فقط.

توضيح : أوجد مصفوفة لا يمكن اختزالها بهذا الشكل.

٣٠- بين كيف يمكنك أن تطبق على أى مصفوفة A التحويل H_{ij} باستعمال تتابع من تحويلات الصفوف من النوع (٢) والنوع (٣).

٣١- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة درجتها $m \times n$ حيث $m \leq n$ ورتبها m فإن $A A^T$ تكون مصفوفة ممتلئة غير شاذة. أذكر النظرية المقابلة عندما تكون رتبة A أصغر من m .

الفصل السادس

المصفوفة المرافقة لمصفوفة مربعة

المصفوفة المرافقة :

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من درجة n وكان α_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij} فإننا نسمى ، بالتعريف ، المصفوفة

$$\text{adjoint } A = \text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

يجب ملاحظة أن المعاملات المرافقة لعناصر الصف (العمود) ذى الرقم i من A هي عناصر العمود (الصف) ذى

الرقم i من $\text{adj } A$

مثال ١ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ يكون في المصفوفة

$$\alpha_{11} = 6, \alpha_{12} = -2, \alpha_{13} = -3, \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -5, \alpha_{23} = 3, \alpha_{31} = -5, \alpha_{32} = 4, \alpha_{33} = -1$$

ومن

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

انظر المسألين ١ - ٢

باستخدام النظريتين X و XI من الفصل ٣ فإننا نجد

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$= \text{diag}(|A|, |A|, \dots, |A|) = |A| I_n = (\text{adj } A) A \quad \text{مثال ٢ :}$$

في المصفوفة A الواردة في المثال ١ يكون $|A| = -7$ وكذلك

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7I$$

بأخذ محددات طرق العلاقة (6.2) فإننا نجد :

$$|A| \cdot |\text{adj } A| = |A|^n = |\text{adj } A| \cdot |A| \quad (6.3)$$

وينتج عن ذلك :

I - إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وغير شاذة فإنه يكون :

$$|\text{adj } A| = |A|^{n-1} \quad (6.4)$$

II - إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وشاذة فإنه يكون :

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = 0$$

إذا كانت رتبة A أصغر من $(n-1)$ فإن $\text{adj } A = 0$ إذا كانت رتبة A تساوى $(n-1)$ فإن رتبة $\text{adj } A$ تساوى الواحد .

انظر المسألة ٣ .

المصفوفة المرافقة لحاصل ضرب مصفوفتين :

سنبرهن في المسألة ٤ .

III - إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة n فإن :

$$\text{adj } AB = \text{adj } B \cdot \text{adj } A \quad (6.5)$$

مصغر مصفوفة مرافقة :

سنبرهن في المسألة ٦ :

IV - ليكن $\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ مصفورا مربعا من درجة m للمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n وليكن

$$A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} \text{ شذمة في } A ,$$

ونفرض أن $M_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m}$ يرمز للمصغر المربع من الدرجة m للمصفوفة $\text{adj } A$ والذي تحتل عناصره في $\text{adj } A$

المواقع ذاتها التي تحتلها عناصر $\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix}$ في A

ينتج مما تقدم أن :

$$|A| \cdot \begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} = (-1)^s |A|^m \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

حيث :

$$s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m .$$

إذا كانت في (6.6) المصفوفة A غير شاذة فإن :

$$\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{vmatrix} = (-1)^s |A|^{m-1} \cdot \begin{vmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (6.7)$$

إذا كانت $m = 2$ فإن العلاقة (6.3) تأخذ الشكل :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} \\ \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} |A| \cdot \begin{vmatrix} j_3, j_4, \dots, j_n \\ i_3, i_4, \dots, i_n \end{vmatrix} \quad (6.8)$$

وهذا يساوى حاصل ضرب $|A|$ بالمتنم الجبرى لـ $\begin{vmatrix} j_1, j_2 \\ i_1, i_2 \end{vmatrix}$

إذا كانت $m = n - 1$ فإن العلاقة (6.7) تأخذ الشكل .

$$\begin{vmatrix} j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \\ i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{i_n+j_n} |A|^{n-2} a_{i_n, j_n} \quad (6.9)$$

وإذا كانت $m = n$ فإن العلاقة (6.7) تأخذ شكل العلاقة (6.4)

مسائل محلولة

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{حيث المصفوفة } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad ١ - \text{إن المصفوفة المرافقة للمصفوفة}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{حيث المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad ٢ - \text{إن المصفوفة المرافقة للمصفوفة}$$

٣ - برهن أنه إذا كانت المصفوفة A من درجة n ورتبتها $n - 1$ فإن $adj A$ تكون ذات رتبة مساوية للواحد .

حيث أن المصفوفة A من الرتبة $n-1$ فإنه يوجد معامل مرافق واحد على الأقل ، لا يساوى الصفر . وإن رتبة $adj A$ تساوى على الأقل الواحد . استنادا إلى النظرية X من الفصل الخامس ، نجد أن رتبة $adj A$ هي على الأكثر $n-(n-1) = 1$. وينتج مما تقدم أن الرتبة تساوى الواحد فعلا .

٤ - أثبت أن $adj A B = adj B \cdot adj A$.

من (6.2) نحصل على $AB adj AB = |AB| \cdot I = (adj AB) AB$

وبما أن :

$$AB \cdot adj B \cdot adj A = A(B \cdot adj B) adj A = A(|B| \cdot I) adj A = |B| (A adj A) = |B| \cdot |A| \cdot I = |AB| \cdot I$$

$$(adj B \cdot adj A) AB = adj B \{ (adj A) A \} B = adj B \cdot |A| \cdot I \cdot B = |A| \{ (adj B) B \} = |AB| \cdot I \quad ,$$

فإننا نستنتج : $adj AB = adj B \cdot adj A$

٥ - أثبت أن $adj(adj A) = |A|^{n-2} \cdot A$ ، وذلك إذا كان $|A| \neq 0$

من (6.2) و (6.4) نحصل على

$$adj A \cdot adj(adj A) = \text{diag}(|adj A|, |adj A|, \dots, |adj A|) \\ = \text{diag}(|A|^{n-1}, |A|^{n-1}, \dots, |A|^{n-1})$$

$$\begin{aligned} A \cdot \text{adj } A \cdot \text{adj}(\text{adj } A) &= |A|^{n-1} \cdot A \\ |A| \cdot \text{adj}(\text{adj } A) &= |A|^{n-1} \cdot A \\ \text{adj}(\text{adj } A) &= |A|^{n-2} \cdot A \end{aligned}$$

وينتج عما تقدم :

٥ - برهن ما يلي

إذا كان $\begin{vmatrix} A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_m} \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$ مصفرا مربعا من درجة m للمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n

وإذا كان $\begin{vmatrix} A_{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} \\ A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n} \end{vmatrix}$ متمم هذا المصفور في A .

وإذا رمز $\begin{vmatrix} M_{j_1, j_2, \dots, j_m} \\ M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$ للمصفور المربع من درجة m لـ $\text{adj } A$ والذي تحتل عناصره من $\text{adj } A$ المواقع ذاتها

التي تحتلها عناصر $\begin{vmatrix} A_{j_1, j_2, \dots, j_m} \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$ في A ، فإن :

$$|A| \cdot \begin{vmatrix} M_{j_1, j_2, \dots, j_m} \\ M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix} = (-1)^s |A|^m \cdot \begin{vmatrix} A_{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} \\ A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n} \end{vmatrix}$$

$$s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m.$$

حيث :
من

$$\begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \dots & a_{i_1, j_m} & a_{i_1, j_{m+1}} & \dots & a_{i_1, j_n} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \dots & a_{i_2, j_m} & a_{i_2, j_{m+1}} & \dots & a_{i_2, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \dots & a_{i_m, j_m} & a_{i_m, j_{m+1}} & \dots & a_{i_m, j_n} \\ \hline a_{i_{m+1}, j_1} & a_{i_{m+1}, j_2} & \dots & a_{i_{m+1}, j_m} & a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n, j_1} & a_{i_n, j_2} & \dots & a_{i_n, j_m} & a_{i_n, j_{m+1}} & \dots & a_{i_n, j_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} & \dots & \alpha_{i_m, j_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} & \dots & \alpha_{i_m, j_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_1, j_m} & \alpha_{i_2, j_m} & \dots & \alpha_{i_m, j_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \alpha_{i_1, j_{m+1}} & \alpha_{i_2, j_{m+1}} & \dots & \alpha_{i_m, j_{m+1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_1, j_n} & \alpha_{i_2, j_n} & \dots & \alpha_{i_m, j_n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 & a_{i_1, j_{m+1}} & \dots & a_{i_1, j_n} \\ 0 & |A| & \dots & 0 & a_{i_2, j_{m+1}} & \dots & a_{i_2, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| & a_{i_m, j_{m+1}} & \dots & a_{i_m, j_n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_n, j_{m+1}} & \dots & a_{i_n, j_n} \end{bmatrix}$$

بأخذ محددات الطرفين نحصل على :

$$(-1)^S |A| \cdot \left| M_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{j_1, j_2, \dots, j_m} \right| = |A|^m \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n} \right|$$

حيث S معرف في نص النظرية . ينتج عما تقدم ، المطلوب مباشرة .

v - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة متخالفية من الدرجة $2n$ فإن $|A|$ يكون مربع كثير (متعدد) حدود مكون من عناصر A .

من التعريف $|A|$ يكون كثير حدود مكونا من عناصرها ، فعلينا أن نبرهن تحت الشروط الواردة أعلاه ، أن كثير الحدود ، هذا ، مربع تام .

$$|A| = a^2 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{فإن } n=1 \text{ لأنه عندما يكون}$$

والآن نفرض ، أن النظرية صحيحة في حالة $n = k$ واعتبر المصفوفة المتخالفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة $2k+2$ يمكننا

أن نكتب بالتجزئة $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ حيث $E = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k+1, 2k+2} \\ a_{2k+2, 2k+1} & 0 \end{bmatrix}$ ونكون B مصفوفة متخالفية من الدرجة $2k$. من الفرض $f^2 = |B|$ حيث f كثير حدود مكون من عناصر B .

إذا رمزنا بالرمز α_{ij} للمعامل المرافق للمعنصر a_{ij} من A فإننا نجد استنادا إلى المسألة ٦ من الفصل الثالث والعلاقة (6.8) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2k+1, 2k+1} & \alpha_{2k+2, 2k+1} \\ \alpha_{2k+1, 2k+2} & \alpha_{2k+2, 2k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{2k+2, 2k+1} \\ \alpha_{2k+1, 2k+2} & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

علاوة على ذلك : $\alpha_{2k+2, 2k+1} = -\alpha_{2k+1, 2k+2}$ أي أن

$$|A| \cdot f^2 = \alpha_{2k+1, 2k+2}^2 \quad \text{و} \quad |A| = \left\{ \alpha_{2k+1, 2k+2}^2 \right\}^0 \quad \text{وهو ما يثبت المطلوب .}$$

مسائل اضافية

٨ - احسب المصفوفة المرافقة لكل من :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (ح) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

الجواب :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (ح) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

٩- تحقق من أن :

(أ) المصفوفة المرافقة لمصفوفة عددية هي مصفوفة عددية .

(ب) المصفوفة المرافقة لمصفوفة قطرية هي مصفوفة قطرية .

(ج) المصفوفة المرافقة للمصفوفة مثلثية هي مصفوفة مثلثية .

١٠- اكتب مصفوفة 0 بحجم A من الدرجة الثالثة بحيث يكون $\text{adj } A = 0$.

١١- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية . فبرهن أن : $\text{adj} (\text{adj } A) = A$.

١٢- أثبت أن المصفوفة المرافقة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ هي $3A$ وأن المصفوفة المرافقة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

هي A نفسها .

١٣- برهن أنه إذا كانت رتبة المصفوفة A المربعة من الدرجة n أصغر من $(n-1)$ فإن $\text{adj } A = 0$.

١٤- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن $\text{adj } A$ تكون متماثلة أيضا .

١٥- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هرميتية فإن $\text{adj } A$ تكون هرميتية أيضا .

١٦- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة n فإن $\text{adj } A$ تكون متماثلة أو متماثلة تخالفية بحسب ما يكون n فرديا أو زوجيا .

١٧- هل توجد نظرية مشابهة لنظرية المسألة ١٦ تتعلق بالمصفوفات الهرميتية التخالفية ؟

١٨- بين أنه في حالة المصفوفات الأولية يكون :

$$\text{adj } H_{ij}^{-1} = -H_{ij} \quad (١)$$

(ب) $\text{adj } H_i^{-1}(k) = \text{diag}(1/k, 1/k, \dots, 1/k, 1, 1/k, \dots, 1/k)$ حيث يقع العنصر 1 في الصف ذي الرقم i .

(ج) $\text{adj } H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(k)$ مع نتائج مشابهة لتحويلات K .

١٩- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n ومن الرتبة n أو $(n-1)$ وإذا كان $\lambda = H_5 \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t$

حيث k رمز I_n أو $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فإن :

$$\text{adj } A = \text{adj } K_1^{-1} \cdot \text{adj } K_2^{-1} \dots \text{adj } K_t^{-1} \cdot \text{adj } \lambda \cdot \text{adj } H_5^{-1} \dots \text{adj } H_2^{-1} \cdot \text{adj } H_1^{-1}$$

٢٠- استخدم الطريقة الواردة في المسألة ١٩ لحساب المصفوفة المرافقة للمصفوفات :

(أ) المصفوفة A الواردة في المسألة ٧ من الفصل الخامس .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب}$$

٢١- نفرض أن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [k - a_{ij}]$ مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثالثة . إذا كان $S(C)$ يمثل مجموع عناصر مصفوفة C ، فبرهن أن

$$S(\text{adj } A) = S(\text{adj } B) \quad \text{و} \quad |B| = k \cdot S(\text{adj } A) - |A|$$

٢٢- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n فإن :

$$|\text{adj}(\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$$

٢٣- لنفرض أن $A_n = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) مصفوفة مثلثية سفلى مثلثها هو مثلث باسكال ، مثال ذلك :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

افرض $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ وأثبت أنه إذا كانت $n = 2, 3, 4$ فإن :

$$\text{adj } A_n = [b_{ij}] = A_n^{-1} \quad (i)$$

٢٤- لنفرض أن المصفوفة B تنتج عن المصفوفة A بحذف صفها i والذين يحملان الرقبن i و p وعموديهما اللذين يحملان الرقبن j و q برهن أن :

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{pj} \\ a_{iq} & a_{pq} \end{vmatrix} = (-1)^{i+p+j+q} |B| \cdot |A|$$

حيث a_{ij} هو المعامل المرافق للعنصر a_{ij} في A .

الفصل السابع

معكوس مصفوفة

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من درجة n بحيث كان $AB = BA = I$ فإن B تسمى معكوس المصفوفة A ، ($B = A^{-1}$) وأن A تدعى معكوس المصفوفة B ، ($A = B^{-1}$) سنبرهن في المسألة ١ أن :

I. يكون للمصفوفة المربعة من درجة n معكوس إذا (وإذا فقط) كانت غير شاذة .

إن معكوس مصفوفة A المربعة ومن درجة n غير شاذة ، هي مصفوفة وحيدة . (انظر المسألة ٧ من الفصل ٢) .

II. إذا كانت A غير شاذة فإن $AB = AC$ يستلزم $B = C$

معكوس المصفوفة القطرية غير الشاذة $\text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ هي المصفوفة القطرية :

$$\text{diag}(1/k_1, 1/k_2, \dots, 1/k_n)$$

إذا كانت المصفوفات A_1, A_2, \dots, A_s غير شاذة ، فإن معكوس المجموع المباشر $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ هو :

$$\text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1})$$

سنقدم فيما يلي طرق إيجاد معكوس مصفوفة عامة غير شاذة .

إيجاد المعكوس باستخدام المصفوفات المرافقة من العلاقة (6.2) يكون I. $A \text{ adj } A = |A|$

إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \dots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \dots & \alpha_{n2}/|A| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \dots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

مثال ١ :

$$\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ هو } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ من المسألة ٢ من الفصل ٦ نجد أن مرافق}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \text{ فإن } |A| = -2 \text{ وبما أن } |A| = -2 \text{ فإن}$$

انظر المسألة ٢ .

إيجاد المعكوس باستخدام المصفوفات الأولية : لنفرض A مصفوفة مربعة غير شاذة من درجة n قد اختزلت إلى

$$H_s \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t = PAQ = I \text{ المصفوفة } I \text{ بواسطة التحويلات الأولية بحيث يكون :}$$

من (5.5) نجد أن $Q^{-1} \cdot P^{-1} = A$ وبما أن $B = (B^{-1})^{-1}$ إذن

$$A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} = Q \cdot P = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \cdot H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad (7.2)$$

مثال ٢ :

من المسألة ٧ من الفصل الخامس نحصل على :

$$H_2 H_1 A K_1 K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ومن ثم

$$A^{-1} = K_1 K_2 H_2 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لقد برهنا في الفصل الخامس أنه يمكن تحويل مصفوفة غير شاذة إلى الشكل العادي بواسطة تحويلات الصفوف فقط . وعلى ذلك واستنادا إلى (7.2) وبفرض $Q = I$ نجد :

$$A^{-1} = P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad (7.3)$$

وعلى ذلك فإنه يمكن القول :

III. إذا حولت المصفوفة A إلى I بواسطة متوالية من تحويلات الصفوف فقط ، فإن A^{-1} تساوى حاصل الضرب بترتيب معاكس ، للمصفوفات الأولية المناظرة لهذه التحويلات .

مثال ٣ :

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ الواردة في المثال ٢ وذلك باستعمال تحويلات صفوف فقط ، لتحويل A إلى I

اكتب المصفوفة $[A \ I_3]$ ثم طبق على صفوفها ذات العناصر الستة ، متوالية من تحويلات الصفوف التي تحول المصفوفة A إلى I_3 فنجد :

$$[A \ I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$= [I_3 \ A^{-1}]$$

وذلك استنادا إلى (7.3) . وحيث أن A قد تحولت إلى I_3 ، فإن I_3 قد تحولت إلى $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ انظر المسألة ٣ .

إيجاد معكوس مصفوفة بطريقة التجزئة :

لنفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من درجة n وأن $B = [b_{ij}]$ معكوس هذه المصفوفة ، ولنفرض أن هاتين المصفوفتين قد جزئتا إلى مصفوفات جزئية من الدرجات المبينة كما يلي :

$$p + q = n \quad \text{حيث} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{bmatrix}$$

بما أن $AB = BA = I_n$ فإننا نجد :

$$\begin{cases} \text{(i)} & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \\ \text{(ii)} & B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(iii)} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \\ \text{(iv)} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q \end{cases} \quad (7.4)$$

وإذا كانت A_{11} غير شاذة فإنه يكون :

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12})\xi^{-1}(A_{21} A_{11}^{-1}) & B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21} A_{11}^{-1}) \\ B_{12} = -(A_{11}^{-1} A_{12})\xi^{-1} & B_{22} = \xi^{-1} \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1} A_{12}).$$

حيث :

انظر المسألة ٤ .

في الحالات الفعلية ، يؤخذ A_{11} من الدرجة $(n-1)$ وللمحصل على A_{11}^{-1} تستعمل الطريقة التالية :

ليكن :

$$G_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad G_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

بعد حساب G_2^{-1} تجزئ G_3 بحيث يكون $A_{22} = [a_{33}]$ وتستخدم العلاقة (7.5) لكي نحصل على G_3^{-1} .
تكرر هذه الطريقة على G_4 بعد أن تجزئها بحيث يكون $A_{22} = [a_{44}]$ وهكذا ...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٤ :}$$

باستعمال طريقة التجزئة :

أوجد معكوس المصفوفة

$$A_{22} = [4]. \quad \text{ف نجد عندها} \quad \text{و} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [1 \ 3]. \quad \text{خذ}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [1 \ 3] \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0].$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [4] - [1 \ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [1], \quad \text{و} \quad \xi^{-1} = [1]$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} [1] \cdot [1 \ 0] \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = [-1 \ 0]$$

$$B_{22} = \xi^{-1} = [1]$$

ونجد أخيرا :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

انظر المسألين ٥ - ٦

معكوس مصفوفة متماثلة : إذا كانت المصفوفة A متماثلة ، أى $a_{ij} = a_{ji}$ فإننا لن نحتاج لحساب أكثر من $\frac{1}{2}n(n+1)$ معاملا مرافقا ، بدلا من حساب n^2 للحصول على A^{-1} من $\text{adj } A$.

إذا كانت هناك أى فائدة من حساب A^{-1} كحاصل ضرب مصفوفات أولية ، فإنه يجب إجراء التحويلات الأولية بحيث نحافظ على خاصية التماثل التى تتمتع بها المصفوفة المفروضة وهذا يتطلب إجراء التحويلات أزواجا أزواجا بحيث إذا أجرى تحويل صفوف فإن علينا أن نتبعه مباشرة بنفس التحويل المقابل للأعمدة . مثال ذلك :

$$H_{12} \begin{bmatrix} 0 & b & c & \dots \\ b & a & \dots & \dots \\ c & \dots & \dots & \dots \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} K_{12} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & \dots \\ b & 0 & c & \dots \\ . & c & \dots & \dots \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-\frac{b}{a}) \begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ b & . & . & . \\ c & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} K_{21}(-\frac{b}{a}) = \begin{bmatrix} a & 0 & c & \dots \\ 0 & . & . & . \\ c & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

بصورة خاصة ، لتحويل الناصر القطرى a إلى 1 نحتاج إلى التحويلين $H_1(1/\sqrt{a})$ و $K_1(1/\sqrt{a})$ وسيكون بصورة عامة إما أن يكون \sqrt{a} عددا غير جذرى أو عددا تخيليا ، ونحن لا ننصح بهذه الطريقة .

ونحصل على وفرة الجهد الكبير ، فى هذه الحالة ، باستعمال طريقة التجزئة لأن العلاقة (7.5) تختصر بالشكل :

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})', & B_{21} &= B_{12}' \\ B_{12} &= -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}, & B_{22} &= \xi^{-1} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}). \quad \text{حيث}$$

انظر المسألة ٧

إذا كانت المصفوفة A غير متماثلة فإنه يمكن استعمال الطريقة الواردة أعلاه لإيجاد معكوس المصفوفة A' والتى تكون مصفوفة متماثلة واستنتاج مقلوب A من العلاقة .

$$A^{-1} = (A'A)^{-1}A' \quad (7.7)$$

مسائل محلولة

١ - أثبت أن مصفوفة مربعة A من الدرجة n يكون لها معكوس فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) غير شاذة .
 لنفرض أن A غير شاذة ، من النظرية IV من الفصل الخامس ، توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون $PAQ = I$ ونجد عندها أن $Q^{-1} \cdot A = P^{-1}$ وأن $A = Q \cdot P$ و $A^{-1} = Q^{-1} \cdot P^{-1}$ موجودة .
 لنفرض أن A^{-1} موجودة . إن هذا يؤدي إلى أن المصفوفة $A \cdot A^{-1} = I$ من الرتبة n إذا كانت A مصفوفة شاذة فإن رتبة AA^{-1} ستكون أصغر من n أي أن A لا يمكن أن تكون شاذة .

٢ - (أ) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = 5$ ، $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

(ب) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = 18$ ، $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

٣ - احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$.

$$[A \ I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7/2 & 11 & 5/2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right]$$

$= [I_4 \ A^{-1}]$

ونجد أخيراً معكوس المصفوفة :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

٤ - حل مجموعة المعادلات التالية

$$\begin{cases} \text{(i)} & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \\ \text{(ii)} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{(iii)} & B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(iv)} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{cases}$$

بالنسبة لـ B_{22} ، B_{21} ، B_{12} ، B_{11} لنفرض $B_{22} = \xi^{-1}$ فنجد من العلاقة (ii) أن $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}$ ومن العلاقة (iii) أن $B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$ ومن العلاقة (i) أن $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$. وأخيرا ، بالتعويض في العلاقة (iv) نجد :

$$\xi = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} \quad \text{و} \quad -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + \xi^{-1}A_{22} = I$$

$$\text{هـ - أوجد معكوس المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ بطريقة التجزئة}$$

$$(1) \text{ لتأخذ المصفوفة } G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ولنجزئها بالطريقة التالية :}$$

$$A_{22} = [3] \quad , \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \ 4],$$

ولكن :

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [2 \ 4] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \ 0]$$

$$\xi^{-1} = [-1/3] \quad \text{و} \quad \xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [3] - [2 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [-3], \quad \text{ومن ثم}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 \end{bmatrix} [2 \ 0] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \frac{1}{3} [2 \ 0], \quad B_{22} = \xi^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 \end{bmatrix}$$

ونجد أخيرا :

$$G_3^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = [1], \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [1 \ 1 \ 1], \quad \text{بحيث يكون } A \text{ لنجزى (ب)}$$

ونجد في هذه الحالة

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = \frac{1}{3} [2 \ -3 \ 2],$$

$$\xi^{-1} = [3] \quad \text{و} \quad \xi = [1] - [1 \ 1 \ 1] \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \end{bmatrix}.$$

وينتج عن ذلك أن

$$B_{11} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [3] \frac{1}{3} [2 \ -3 \ 2] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-2 \ 3 \ -2], \quad B_{22} = [3]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ونجد أخيرا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ - أوجد معكوس المصفوفة بطريقة التجزئة .}$$

لا يمكننا أن نأخذ $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ لأنها مصفوفة شاذة

$$\text{من المثال ٣ يكون معكوس } B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و ينتج عن هذا أن } H_{23} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

$$A^{-1} = B^{-1} H_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك إذا كان المصفّر المربع A_{11} ذو الدرجة $(n-1)$ للمصفوفة غير الشاذة المربعة A ذات الدرجة n شاذًا فإننا نشكل ، أولا ، مصفوفة غير شاذة مربعة ومن الدرجة $(n-1)$ واقعة في الزاوية العلوية اليسرى منه لكي نحصل على المصفوفة B ثم نوجد معكوس المصفوفة B ومن ثم بإجراء تحويل مناسب على B^{-1} نحصل على A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ - احسب معكوس المصفوفة المتماثلة}$$

لننظر أولا في المصفوفة الجزئية $G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ونجزئها بالشكل :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1 \ 2], \quad A_{22} = [1]$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ف نجد

$$\xi = A_{22} - A_{21} (A_{11}^{-1} A_{12}) = [1] - [-1 \ 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2]$$

$$\xi^{-1} = [-\frac{1}{2}] \text{ ,}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ومن ثم}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G_3^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

و

اعتبر الآن المصفوفة A مجزأة كما يلي :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \ -3 \ -1], \quad A_{22} = [4]$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1} A_{12} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi = [18/5], \quad \xi^{-1} = [5/18] \quad \text{فنجد عندها}$$

$$B_{11} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ -7 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \frac{1}{18} [1 \ -2 \ 10], \quad B_{22} = [5/18] \quad \text{ومن ثم}$$

ويكون أخيراً :

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

مسائل إضافية

٨- أوجد المصفوفة المرافقة ومعكوساً لكل من المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب: المعكوسات: (أ)}$$

٩- أوجد معكوس المصفوفة (د) الواردة في المسألة ٨ كجملوع مباشر .

١٠- أوجد معكوس كل من المصفوفات الواردة في المسألة ٨ مستعملا طريقة المسألة ٣ .

١١- السؤال السابق نفسه إذا كانت المصفوفات هي :

$$(أ) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (ج) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (د) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(أ) : \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{48} \begin{bmatrix} -144 & 36 & 60 & 21 \\ 48 & -20 & -12 & -5 \\ 48 & -4 & -12 & -13 \\ 0 & 12 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ج) \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

١٢- استخدم نتائج المثال ٤ لإيجاد معكوس المصفوفة (د) الواردة في المسألة (١١) بطريقة التجزئة .

١٣- احسب بطريقة التجزئة معكوس كل من المصفوفتين (أ) و (ب) من المسألة ٨ والمصفوفات من (أ) إلى (ج) من المسألة ١١ .

$$١٤- احسب بطريقة التجزئة ، معكوس كل من المصفوفات المماثلة - أ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ - ب $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
الجواب - أ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ - ب $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$$

١٥- أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن $AB = AC$ يستلزم $B = C$

١٦- برهن أنه إذا كانت المصفوفتان غير الشاذتين A و B تبديليتين فإن المصفوفات (أ) A^{-1} و B ، (ب) A و B^{-1} ، (ج) A^{-1} و B^{-1} تكون تبادلية

$$\text{إرشاد : (أ) } A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1} .$$

١٧- برهن أنه إذا كانت المصفوفة غير الشاذة A مماثلة فإن A^{-1} تكون مماثلة أيضا .

$$\text{إرشاد : } A^{-1}A = I = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A .$$

١٨- برهن أنه إذا كانت المصفوفتان غير الشاذتين المماثلتين A و B تبادليتين ، فإن (أ) $A^{-1}B$ ، (ب) AB^{-1} و (ج) $A^{-1}B^{-1}$ تكون مماثلة .

$$\text{إرشاد (أ) } (A^{-1}B)' = (BA^{-1})' = (A^{-1})'B' = A^{-1}B .$$

١٩ - نقول إن المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ لها معكوس من اليمين B فيها إذا كان $AB = I$ كما نقول إن لها معكوساً من اليسار C فيها إذا كان $CA = I$.

برهن أنه يكون للمصفوفة A معكوس من اليمين فيها إذا كانت (وإذا كانت فقط) A من الرتبة m ويكون لها معكوس من اليسار وفيها إذا كانت (وإذا كانت فقط) من الرتبة n .

٢٠ - أوجد معكوساً من اليمين للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ فيها إذا كان موجوداً .

إرشاد : إن رتبة A تساوي ٣ وإن المصفوفة الجزئية $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ غير شاذة ولها معكوس S^{-1} إن المعكوس من اليمين

المصفوفة A هو المصفوفة $B = \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ من الدرجة 4×3 .

٢١ - برهن أن المصفوفة الجزئية $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ للمصفوفة A في المسألة ٢٠ ، غير شاذة واستنتج أن $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ معكوس آخر من اليمين للمصفوفة A .

٢٢ - احصل على $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ كمعكوس من اليسار للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حيث c, b, a اختيارية.

٢٣ - برهن أنه ليس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ معكوس من اليمين ولا معكوس من اليسار .

٢٤ - برهن أنه إذا كان $|A_{11}| \neq 0$ فإن $|A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$

٢٥ - إذا كان $|I + A| \neq 0$ فإن $(I + A)^{-1}$ و $(I - A)$ تبدليتان .

٢٦ - برهن العلاقة (i) من المسألة ٢٣ في الفصل السادس .

الفصل الثامن

الحقول (المجالات)

الحقول العددية (مجالات الأعداد) :

إن أى تجمع أو مجموعة S من الأعداد الحقيقية أو المركبة ، تحوى الصفر وعناصر أخرى تدعى حقلا عدديا إذا كان إجراء عمليات جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة (باستثناء القسمة على الصفر) أى زوج من الأعداد ، يعطى أحد أعداد المجموعة S .

أمثلة من الحقول العددية :

- مجموعة كل الأعداد الجذرية .
 - مجموعة كل الأعداد الحقيقية
 - مجموعة كل الأعداد التى من الشكل $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان جذريان .
 - مجموعة كل الأعداد المركبة $a + bi$ حيث a و b عددان حقيقيان .
- أما مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد التى تكتب بالشكل $b\sqrt{3}$ حيث b عدد جذرى فليسا حقليين عدديين

الحقل :

بصورة عامة يسمى أى تجمع أو مجموعة S مكونة من عنصرين أو أكثر ومزودة بعمليتين تدعى أولاهما جمعا (+) وتدعى الثانية منهما ضربا (.) ، إنها حقل F فيما إذا تحققت الشروط التالية (a, b, c, \dots ، عناصر من F أى مقادير عددية) .

$$\text{ج ١ : } a + b \text{ عنصر وحيد من } F$$

$$\text{ج ٢ : } a + b = b + a$$

$$\text{ج ٣ : } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{ج ٤ : يوجد لكل عنصر من } F \text{ عنصر } 0 \text{ من } F \text{ يحقق العلاقة } a + 0 = 0 + a = a$$

$$\text{ج ٥ : يوجد لكل عنصر } a \text{ من } F \text{ عنصر وحيد } -a \text{ من } F \text{ يحقق العلاقة } a + (-a) = 0$$

$$\text{ض ١ : } ab = a.b \text{ عنصر وحيد من } F$$

$$\text{ض ٢ : } ab = ba$$

$$\text{ض ٣ : } (a.b).c = a.(b.c)$$

$$\text{ض ٤ : يوجد لكل عنصر } a \text{ من } F \text{ عنصر وحيد } 1 \neq 0 \text{ يحقق العلاقة } 1.a = a.1 = a$$

$$\text{ض ٥ : يوجد لكل عنصر } a \neq 0 \text{ من } F \text{ ، عنصر وحيد } a^{-1} \text{ فى } F \text{ نفسها ويحقق العلاقة } a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

$$\text{ت ١ : } a(b + c) = ab + ac$$

$$\text{ت ٢ : } (a + b)c = ac + bc$$

بالإضافة إلى حقول الأعداد الواردة أعلاه ، يمكن إعطاء أمثلة أخرى من الحقول :

$$\text{(ه) مجموعة خوارج القسمة } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ حيث } P(x) \text{ و } Q(x) \text{ كثيرات حدود فى المتغير } x \text{ وذات معاملات حقيقية .}$$

$$\text{(و) مجموعة المصفوفات ذات الدرجة } 2 \times 2 \text{ وذات الشكل } \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عددان حقيقيان .}$$

(ر) المجموعة التي تتحقق فيها العلاقة $a+a=0$ يقال عن هذا الحقل إنه ذو مميز يساوى 2 ونستبعد من الآن فصاعداً .
 في مثل هذا الحقل نجد ، مثلاً ، أن برهان الخاصية المعروفة التي تقول إن كل محددة تحوى صفين متطابقين تساوى الصفر ، لا يبقى قائماً فإذا بادلنا بين الصفين المتطابقين في المحددة فإننا نجد $D=-D$ أو $2D=0$ ولكن D ليس ، بالضرورة ، صفراً .

الحقول الجزئية :

إذا كانت T و S مجموعتين وإذا كان كل عنصر من S عنصر من T فإننا نقول إن S مجموعة جزئية من T .
 إذا كان T و S حقلين وإذا كانت S مجموعة جزئية من T فإن S تدعى حقلاً جزئياً من T . فثلاً إن حقل الأعداد الحقيقية هو حقل جزئى من حقل الأعداد المركبة ، إن حقل الأعداد الجذرية هو حقل جزئى من حقل كل الأعداد الحقيقية ومن حقل كل الأعداد المركبة .
 المصفوفات المعرفة على حقل :

إذا انتمت كل عناصر مصفوفة A إلى حقل F فإننا نقول إن « A معرفة على F » فثلاً .

إن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$ مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الجذرية وإن $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix}$ مصفوفة معرفة على حقل

الأعداد المركبة . إن A هنا مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الحقيقية بينما B ليست كذلك ويمكننا ان نعتبر أيضاً ، A معرفة على حقل الأعداد المركبة .

لتكن A, B, C, \dots مصفوفات معرفة على نفس الحقل F ولنفرض أن F أصغر حقل يحوى كل عناصر هذه المصفوفات ، أى أنه لو فرضنا أن كل هذه العناصر أعداد جذرية فإن الحقل F يكون حقل الأعداد الجذرية وليس حقل الأعداد الحقيقية ولا حقل الأعداد المركبة . لو تفحصنا مختلف العمليات التي تعرف على هذه المصفوفات منفردة أو مجتمعة والواردة في الفصول السابقة ، لوجدنا أننا لا نحتاج لأى عناصر غير متممة إلى F مثال ذلك :

إن مجموع وحاصل ضرب مصفوفات معرفة على F هي مصفوفات معرفة على F .

إذا كانت A غير شاذة فإن معكوسها معرف على F .

إذا كان $A \sim I$ ، فإنه توجد مصفوفتان P و Q معرفتان على F بحيث يكون $PAQ = I$ و I مصفوفة معرفة على F

إذا كانت A مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الجذرية وكانت رتبها r فإن رتبها لا تتغير فيما إذا اعتبرت معرفة على حقل الأعداد الحقيقية أو حقل الأعداد المركبة .

سنعتبر بعدما تقدم وعندما نقول إن المصفوفة A معرفة على F أن F أصغر حقل يحوى عناصر A .

سيكون من الضروري في الفصول القادمة وضمن بعض الحالات ، أن نقصر الحقل على حقل الأعداد الحقيقية . وفي حالات أخرى سيحدد حقل عناصر المصفوفات مثلاً من حقل الأعداد الجذرية إلى حقل الأعداد الحقيقية . وفي بعض الأحيان لا تؤدى العبارة « A معرفة على F » إلى أى قصر على الحقل باستثناء الحقل المستبعد ذى المميز المساوى 2 .

مسائل محلولة

١ - برهن أن مجموعة كل الأعداد المركبة تكون حقلاً .

يمكننا التحقق من ذلك بمراجعة الخواص ج ١ - ج ٥ ، ض ١ - ض ٥ ، ت ١ - ت ٢ . إن العنصر المعلوم (ج ٤) هو الصفر وعنصر الوحدة (ض ٥) هو الواحد . إذا كان $a + bi$ و $c + di$ عنصرين من المجموعة المفروضة فإن سالب (ج ٥) للعدد $a + bi$ هو $-a - bi$ وإن حاصل الضرب (ض ١) هو $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ وإن المعكوس (ض ٥) للعدد $a + di \neq 0$ هو :

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

إن التحقق من صحة بقية الخواص متركب كتمرين للقارئ .

مسائل اضافية

٢- تحقق من أن (١) مجموعة كل الأعداد الحقيقية ذات الشكل $a + b\sqrt{5}$ حيث a و b عدadan جذريان و

(ب) مجموعة كل خوارج القسمة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود في المتغير x بمعاملاتها أعداد حقيقية ، تكونان حقلين ؛

٣ - برهن أن (١) مجموعة كل الأعداد الجذرية

(ب) مجموعة كل الأعداد ذات الشكل $a+b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان جذريان و

(ج) مجموعة كل الأعداد ذات الشكل $a + bi$ حيث a و b عددان حقيقيان ، هي حقول جزئية من حقول الأعداد المركبة .

٤ - برهن ان مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عدنان جذريان، تكون حقلا

برهن أن هذا هو حقل جزئي من حقل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

هـ - لماذا لا يمكن اعتبار مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والتي تكون عناصرها أعداد حقيقية ، حقلا ؟

٦- إذا حققت مجموعة R عناصرها a, b, c, \dots الخواص (ج ١، ج ٢، ج ٣، ج ٤، ج ٥، ض ١، ض ٢ ، ض ٣ ، ت ١ ، ت ٢) الواردة سابقا فإنها تدعى حلقة ولكي نؤكد على أن الضرب المعرف على هذه المجموعة ، غير تبديل فإننا نصف هذه الحلقة بأنها غير تبديلية وعندما تحقق الحلقة R الخاصية ض ٢ فإنها توصف بكونها تبديلية وإذا حققت الحلقة R الخاصية ض ٤ فإنها تدعى حلقة ذات عنصر وحده تحقق ما يلي :

(١) أن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية $0, \pm 2, \pm 4, \dots$ هي مثال حلقة تبديلية لا تحوى عنصر الوحدة.

(ب) أن مجموعة كل الأعداد الصحيحة $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ هي مثال لحلقة تبديلية ذات عنصر الوحدة.

(ج) أن مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة n والمعرفة على F مثال حلقة غير تبديلية ذات عنصر الوحدة.

(د) إن مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكر $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عدنان حقيقيان هي مثال لخلقة تبديلية

ذات عنصر وحدة .

v - هل يمكن تحويل المجموعة (١) الواردة في المسألة ٦ إلى حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة وذلك بإضافة العنصرين ± 1 إلى هذه المجموعة ؟

٨- استنادا إلى المسألة ٤ تكون المجموعة (د) الواردة في المسألة ٦ حقلا . هل كل حقل حلقة ؟ هل كل حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة حقل ؟

٩ - صف حلقة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$. حيث a و b عناصر من F . إذا كانت A مصفوفة

ما من هذه الحلقة وكان $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ در هن أن $LA = A$ تسمى L عنصر وحدة من اليسار. هل يوجد عنصر وحدة من اليمين؟

١٠ - ليكن C حقل الأعداد المركبة $q + pi$ و K حقل المصفوفات ذات الدرجة والشكل $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$ حيث u, v, q, p أعداد

حقيقية . نعتبر العدد المركب $a+bi$ والمصفوفة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ كمعبرين متناظرين من هاتين المجموعتين ولنسم كلا منهما خيالاً للآخر .

(۱) اکتب خیال کل من : $3 + 2i$, 5 , $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$;

(ب) برهنہ اُن خیال مجموعہ (حاصل ضرب) عنصرین K ہو مجموعہ (حاصل ضرب) خیالہما C

(ج) برهن أن خيال عنصر الوحدة من K عنصر الوحدة من C

(د) ما هو خيال المرافق للعدد $a + bi$ ؟

(هـ) ما هو الخيال لمعكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ؟

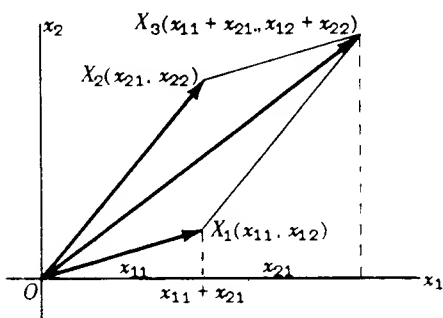
إن هذا مثال للتشاكل (الايزومورفيزم) بين مجموعتين .

الفصل التاسع

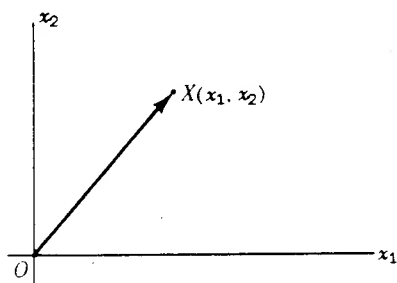
الارتباط الخطي للمتجهات والصيغ

الزوج المرتب :

يستعمل الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية (x_1, x_2) للتعبير عن نقطة X في مستوى ونستعمل هنا ، هذا الزوج المرتب نفسه ونكتبه بالشكل $[x_1, x_2]$ للدلالة على المتجه ذي البعدين OX (انظر الشكل ٩ - ١)



شكل ٩ - ٢



شكل ٩ - ١

إذا كان $X_1 = [x_{11}, x_{12}]$ و $X_2 = [x_{21}, x_{22}]$ متجهين مختلفين فإن مجموعهما الذي يتعين بحسب قانون متوازي أضلاع (انظر الشكل ٩ - ٢) يكون :

$$X_3 = X_1 + X_2 = [x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}]$$

وإذا عاملنا X_1, X_2 كصفوفتين من الدرجة 1×2 فإننا نلاحظ أن ما سبق يمثل قاعدة جمع المصفوفات الواردة في الفصل الأول. وإذا كان فوق ذلك k عدد ما فإن :

$$kX_1 = [kx_{11}, kx_{12}]$$

هو حاصل ضرب المعتاد للمتجهات بعدد في علم الفيزياء .

المتجهات :

نعني بمتجه ذي n بعدا على F ، مجموعة مرتبة مكونة من n عنصرا x_i من F ، مثل :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (9.1)$$

تسمى العناصر x_1, x_2, \dots, x_n على الترتيب من الشمال اليمين المركبة الأولى ، الثانية .. للمتجه X . سنرى فيما بعد أنه من الأفضل أن نكتب مركبات متجه على صورة عمود ، مثل :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (9.1')$$

ومع أن كلا من (9.1) ، $(9.1')$ تعبر عن نفس المتجه إلا أننا نقول، عن (9.1) إنه متجه صفا وعن $(9.1')$ إنه متجه عمودى، ويمكننا عندئذ أن نعتبر المصفوفة A ذات الدرجة $p \times q$ كتعبير عن p متجها صفا (عناصر أى صف من صفوفها مركبات متجه ذى q بعدا) أو كتعبير عن q متجها عمودا .

يسمى المتجه الذى يكون كل عنصر من عناصره صفرا ، بالمتجه الصفري ، ويرمز له بالرمز O .
إن مجموع وحاصل طرح متجهين صفين (عمودين) وحاصل ضرب عدد بمتجه تخضع تماما لقواعد هذه العمليات فى المصفوفات .

مثال ١ :

اعتبر المتجهات ذات الأبعاد الثلاثة :

$$X_4 = [-4, -4, 6] \quad \text{و} \quad X_1 = [3, 1, -4], \quad X_2 = [2, 2, -3], \quad X_3 = [0, -4, 1].$$

تحقق العلاقات التالية

$$2X_1 - 5X_2 = 2[3, 1, -4] - 5[2, 2, -3] = [6, 2, -8] - [10, 10, -15] = [-4, -8, 7] \quad (أ)$$

$$2X_2 + X_4 = 2[2, 2, -3] + [-4, -4, 6] = [0, 0, 0] = 0 \quad (ب)$$

$$2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0 \quad (ج)$$

$$2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0 \quad (د)$$

إن المتجهات المستعملة هنا هى متجهات صفوف ومن السهل أن نلاحظ أنه لو مثل كل قوس من الأقواس السابقة متجها عمودا ، فإن النتائج السابقة تبقى صحيحة .

الارتباط الخطي للمتجهات :

إن مجموعة المتجهات والتي عددها m ذات الـ n مركبة المعرفة على F

$$\begin{aligned} X_1 &= [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}] \\ X_2 &= [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}] \\ &\dots\dots\dots \\ X_m &= [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}] \end{aligned} \quad (9.2)$$

تسمى مرتبطة خطياً على F فيما إذا وجد m عنصرا k_1, k_2, \dots, k_m من F ليست كلها أصفارا وتحقق العلاقة :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m = 0 \quad (9.3)$$

أما إذا لم يتحقق 9.3 فإنه يقال بأن مجموعة المتجهات مستقلة خطياً .

مثال ٢ :

اعتبر المتجهات الأربعة الواردة فى المثال ١ . من (ب) يتضح أن المتجهين X_2, X_4 مرتبطين خطياً وكذلك المتجهات

X_1, X_2, X_3 مرتبطة خطياً كما يتضح من (ج) وأن المجموعة كلها مرتبطة خطياً كما هو واضح من (د)

ومن جهة ثانية نجد أن المتجهين X_1 و X_2 مستقلان خطياً إذ أنه لو فرضنا العكس لوجب أن يكون

$$k_1X_1 + k_2X_2 = [3k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, -4k_1 - 3k_2] = [0, 0, 0]$$

$$\text{أى : } 3k_1 + 2k_2 = 0, \quad k_1 + 2k_2 = 0 \quad \text{و} \quad -4k_1 - 3k_2 = 0$$

ينتج عن العلاقتين الأوليتين أن $k_1 = 0$ ثم نجد أن $k_2 = 0$

أى متجه X ذا n مركبة (بعدا) مرتبط خطياً مع المتجه الصفري ذى n بعدا .

نقول عن المتجه X_{m+1} إنه قابل للتمثيل كاتلاف خطى للمتجهات X_1, X_2, \dots, X_m فيما إذا وجدت عناصر k_1, k_2, \dots, k_m

من F بحيث يتحقق :

$$X_{m+1} = k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m .$$

نظريات أساسية :

في (9.3) إذا كان $k_i \neq 0$ فإنه يمكن الحل بالنسبة لـ

$$X_i = -\frac{1}{k_i} \{k_1 X_1 + \dots + k_{i-1} X_{i-1} + k_{i+1} X_{i+1} + \dots + k_m X_m\} \quad \text{أو}$$

$$X_i = s_1 X_1 + \dots + s_{i-1} X_{i-1} + s_{i+1} X_{i+1} + \dots + s_m X_m \quad (9.4)$$

وعلى ذلك

I. إذا كان هناك m متجها مرتبطة خطيا فإنه يمكن دائما التعبير عن أحدها كائتلاف (تركيب) خطي من المتجهات الأخرى .

II. إذا كانت m متجها X_1, X_2, \dots, X_m مستقلة خطيا بينما تكون المجموعة ، التي نحصل عليها ، بإضافة متجه آخر X_{m+1} إلى المجموعة السابقة ، مرتبطة خطيا . فإنه يمكن التعبير عن X_{m+1} بائتلاف خطي للمتجهات X_1, X_2, \dots, X_m .

مثال ٣ :

من المثال ٢ يتضح أن المتجهين X_2, X_1 مستقلان خطيا بينما X_3, X_2, X_1 مرتبطة خطيا وهي تحقق العلاقة $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$ ومن الواضح أن : $X_3 = 2X_1 - 3X_2$.

III. إذا وجد بين الـ m متجها X_1, X_2, \dots, X_m مجموعة جزئية مكونة من $m > r$ متجها مرتبطة خطيا ، فإن المجموعة كاملة تكون مرتبطة خطيا .

مثال ٤ :

ينتج من (ب) من المثال ١ أن المتجهين X_4, X_2 مرتبطان خطيا وينتج عن (د) أن مجموعة المتجهات الأربعة مرتبطة خطيا .

IV. إذا كانت رتبة المصفوفة A حيث

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mr} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

المصاحبة للمتجهات (9.2) التي عددها m مساوية $m > r$. فإنه يوجد على الضبط r متجها ، من هذه المجموعة ، مستقلة خطيا . ويمكن تمثيل كل متجه من المتجهات المتبقية والتي عددها $(m-r)$ بائتلاف خطي للمتجهات r المذكورة .

انظر المسألتين ٢ - ٣

V. إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا هو أن تكون رتبة مصفوفة المتجهات (9.5) هي $m > r$ إذا كانت الرتبة تساوي m فإن المتجهات المذكورة تكون مستقلة خطيا .

إن مجموعة المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا ، بالضرورة ، في الحالة التي يكون فيها $n < m$.

إذا كانت مجموعة المتجهات (9.2) مستقلة خطيا فإن كل مجموعة جزئية منها تكون كذلك .

الصيغة (الصورة) الخطية :

إن الصيغة الخطية على F في n متغير x_1, x_2, \dots, x_n هو كثير حدود من النوع

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (9.6)$$

حيث معاملات كثيرة الحدود عناصر من F .

اعتبر مجموعة مكونة من m من الصيغ الخطية في n متغيرا

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ f_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \right. \quad (9.7)$$

والمصنوفة المصاحبة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

إذا وجدت عناصر مثل k_1, k_2, \dots, k_r من F وليست كلها أصفارا بحيث يكون

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_m f_m = 0$$

فإننا نصف الصيغ (9.7) بأنها مرتبطة خطياً وإذا لم تحقق هذه الشروط فإنها تكون مستقلة خطياً. أى أن الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى للصيغ (9.7) يكافئ الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى لمتمحجات صفوف A .

مثال ۵ :

مرتبة خطأ لأن رتبة المصفوفة $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3, f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3, f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ إن الصيغة

تساوی 2 وفي هذه الحالة $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

إن المجموعة (9.7) مرتبطة خطياً بالضرورة ، فما إذا كان $n < m$ لماذا ؟

مسائل محلولة

١- برهن أنه إذا وجد من بين المتجهات X_1, X_2, \dots, X_m والتي عددها m متجه مجموعة جزئية ولتكن X_1, X_2, \dots, X_r حيث $m > r$ مرتبة خطياً فإن مجموعة الـ m متجه تكون مرتبة خطياً.

بما أننا فرضنا أن $k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_rX_r = 0$ نتحقق لبعض قيم k الغير متلاشية فإنه يكون :

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_r X_r + 0 \cdot X_{r+1} + \dots + 0 \cdot X_m = 0$$

حيث لا تعتمد كل المعاملات k وهذا يعني أن مجموعة المتجهات كلها مرتبطة خطياً.

٢- أثبت أنه إذا كانت رتبة مصفوفة مصاحبة لمجموعة متجهات عددها m ذات n بعدا ، هي r حيث $m > r$ فإنه يوجد على الضبط في هذه المجموعة r متجها مستقلة خطيا وأنه يمكن التعبير عن الـ $(m-r)$ متجها الباقية بتركييب (ائتلاف) خطية لمجموعة الـ r متجها المذكورة.

لتكن (9.5) المصفوفة المصاحبة ولنفرض أولاً أن $n \geq m$ إذا كان المصغر ذو الدرجة r والواقع في الزاوية العليا اليسرى من المصفوفة المذكورة ، مساوياً للصفر ، فإننا نبادل الصفوف فيما بينها والأعمدة حتى نضع في هذا المكان مصفراً غير متلاش من الدرجة r ثم نرقم كل الأسطر والأعمدة بالترتيب الطبيعي . فنجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

اعتبر الآن مصفرا من الدرجة $(r+1)$ فنجد :

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} & x_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

حيث العناصر x_{pj}, x_{iq} . هي على الترتيب من أى صف أو أى عمود غير واقعين في Δ لتكن $\Delta = k_1, k_2, \dots, k_{r+1}$ هي المعاملات المرافقة الخاصة بالعناصر $x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{rq}, x_{pq}$ المكونة للعمود الأخير من ∇ لذلك من (10 - 3) :

$$k_1 x_{1i} + k_2 x_{2i} + \dots + k_r x_{ri} + k_{r+1} x_{pi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$k_1 x_{1q} + k_2 x_{2q} + \dots + k_r x_{rq} + k_{r+1} x_{pq} = \nabla = 0 \quad \text{كذلك من الفرض}$$

والآن لنغير . العمود الأخير من ∇ بعمود آخر من الأعمدة الباقية وليكن العمود ذا الرقم u الذى لا يظهر في Δ إن المعاملات المرافقة لعناصر هذا العمود هي المعاملات المرافقة k التى ذكرناها سافا، لهذا :

$$k_1 x_{1u} + k_2 x_{2u} + \dots + k_r x_{ru} + k_{r+1} x_{pu} = 0$$

$$k_1 x_{1t} + k_2 x_{2t} + \dots + k_r x_{rt} + k_{r+1} x_{pt} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

لذلك

وبالتجميع على جميع قيم t فإننا نجد :

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_r X_r + k_{r+1} X_p = 0$$

وبما أن $k_{r+1} = \Delta \neq 0$ فإن X_p تركيب خطى لـ r متجه X_1, X_2, \dots, X_r المستقلة خطيا . ولكن X_p هو أى متجه من الـ $(m-r)$ متجه $X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_m$ أى أنه يمكن التعبير عن كل متجه من هذه المتجهات بتركيب خطى للمتجهات X_1, X_2, \dots, X_r .

أما في حالة $n < m$ اعتبر المصفوفة عندما نضيف لكل متجه من المتجهات الـ m عددا إضافيا من المركبات الثلاثية (الأصفار) عددها $m-n$ ولنرمز لهذه المصفوفة بالشكل $[A : 0]$. إن من الواضح أن الارتباط الخطي والاستقلال الخطي للمتجهات ورتبة المصفوفة A لم تتغير .

وهكذا نكون قد برهنا في أى من الحالتين أن المتجهات X_{r+1}, \dots, X_m تراكيب خطية للمتجهات X_1, X_2, \dots, X_r المستقلة خطيا .

٣ - برهن باستعمال مصفوفة ، أن كلا من مجموعى المتجهات الثلاثية

$$\begin{aligned} X_1 &= [2, 3, 1, -1] & X_2 &= [1, 2, -3, 4] \\ X_2 &= [2, 3, 1, -2] & X_3 &= [3, -1, 2, 1] \\ X_3 &= [4, 6, 2, -3] & X_4 &= [1, -5, 8, -7] \end{aligned} \quad \text{و} \quad (1)$$

مرتبطة خطياً. في كل منها عين مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطياً وعبر عن الأشكال الباقية بتركيب خطية للأول.

$$(1) \text{ إن المصفوفة } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix} \text{ ذات رتبة مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا وليكونا } X_2, X_3. \text{ إن المصغر}$$

$$\text{ف نجد أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير هي على الترتيب} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} \text{ اعتبر المصغر } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

من الشمال اليمين -7, 14, 7 - فيكون إذن

(ب) إن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ تساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا لكن X_1 و X_2 ونأخذ أن

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{لئلا} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{لئلا} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{المصغر} ; 0$$

أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير في $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ هي على الترتيب من الشمال إلى اليمين 2.2، -2.2، فيكون

$$X_1 - X_2 + X_3 = 0, \quad 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0$$

٤ - لتكن $P_1(1, 1, 1), P_2(1, 2, 3), P_3(3, 1, 2), P_4(2, 3, 4)$ نأخذ من الفراغ العادى. نأخذ النقطتين P_2 و P_1 مع نقطة الأصل مستويا π معادلته

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0 \quad (i)$$

لنموض في الطرف الأيسر من العلاقة (i) باحداثيات النقطة P_4 فنجد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أى أن P_4 واقعة في المستوى π إن هذا يعنى أن $[P_4, P_1, P_2]$ من الرتبة 2 لقد تبينا أن ثلاثة نقاط من

الفراغ العادى تقع في مستوى يمر بنقطة الأصل فيا إذا كانت مصفوفة احداثياتها مع الرتبة الثانية.

برهن أن P_3 لاتقع في المستوى π .

مسائل اضافية

٥ - برهن أنه إذا كانت الـ m متجهها X_1, X_2, \dots, X_m مستقلة خطيا بيما تكون المجموعة ، التى تنتج عن هذه المتجهات ، بإضافة متجه آخر X_{m+1} مرتبطة خطيا فإنه يمكن التعبير عن X_{m+1} بتركيب خطي للمتجهات X_1, X_2, \dots, X_m .

٦ - برهن أن تمثيل X_{m+1} الوارد في المسألة ٥ هو تمثيل وحيد.

إرشاد : افرض $X_{m+1} = \sum_{i=1}^m k_i X_i = \sum_{i=1}^m s_i X_i$ ثم اعتبر $\sum_{i=1}^m (k_i - s_i) X_i = 0$

٧ - برهن أن الشرط اللازم والكافى لكي تكون المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا هو أن يكون لمصفوفة هذه المتجهات

$$(9.5) \text{ رتبة } r \text{ حيث } m > r.$$

إرشاد : نفرض أن الـ m متجها مرتبطة خطيا وأن (9.4) محققة . في (9.5) لنطرح من الصف ذى الرقم i

حاصل ضرب الصف الأول في s_1 وحاصل ضرب الصف الثانى في s_2, \dots كما هو موضح في (9.4)

من أجل العكس أنظر المسألة ٢ .

٨ - افحص كل واحدة من مجموعات المتجهات التالية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية وذلك من حيث الارتباط .

والاستقلال الخطيين . وانتخب في كل واحدة من المجموعات المرتبطة خطيا مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطيا ومثل

كل واحد من المتجهات الباقية بتركيب خطي للمتجهات المستقلة خطيا .

$$\begin{array}{lll}
 X_1 = [2, 1, 3, 2, -1] & X_1 = [1, 2, 1] & X_1 = [2, -1, 3, 2] \\
 X_2 = [4, 2, 1, -2, 3] & X_2 = [2, 1, 4] & X_2 = [1, 3, 4, 2] \\
 X_3 = [0, 0, 5, 6, -5] & X_3 = [4, 5, 6] & X_3 = [3, -5, 2, 2] \\
 X_4 = [6, 3, -1, -6, 7] & X_4 = [1, 8, -3] &
 \end{array} \quad (أ) \quad (ب) \quad (ج)$$

$$\begin{array}{lll}
 X_3 = 2X_1 - X_2 & X_3 = 2X_1 + X_2 & X_3 = 2X_1 - X_2 \\
 X_4 = 2X_2 - X_1 & X_4 = 5X_1 - 2X_2 &
 \end{array} \quad (أ) \quad (ب) \quad (ج)$$

الأجوبة

- ٩ - لماذا لا يوجد أكثر من n متجهاً مستقلة خطياً في مجموعة المتجهات ذات n مركبة على F ؟
- ١٠ - برهن أنه إذا كان في (2.9) أما $X_i = X_j$ أو $X_i = aX_j$ حيث a من F فإن مجموعة المتجهات تكون مرتبطة خطياً . هل العكس صحيح ؟
- ١١ - برهن أن أى متجه X ذي n مركبة مرتبط خطياً مع المتجه الصفري ذي n مركبة : أى أنه يمكن اعتبار X و 0 متناسين .

$$\text{إرشاد : اعتبر العلاقة } k_1X + k_2 \cdot 0 = 0 \text{ حيث } k_1 = 0 \text{ و } k_2 \neq 0$$

- ١٢ - (أ) برهن أن : $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$, $X_3 = [1+2i, 1-i, 2-i]$ مرتبطة خطياً على حقل الأعداد الجذرية وبالتالي على حقل الأعداد المركبة .

- (ب) برهن أن $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$, $X_3 = [0, 1-2i, 2-i]$ مستقلة خطياً على حقل الأعداد الحقيقية ومرتبطة على حقل الأعداد المركبة .
- ١٣ - افحص الارتباط والاستقلال الخطيين للصور الخطية :

$$\begin{array}{ll}
 f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 & f_1 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 f_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 & f_2 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\
 f_3 = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & f_3 = 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4
 \end{array} \quad (أ) \quad (ب)$$

الجواب (أ) $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$

- ١٤ - ابحث في الارتباط والاستقلال الخطيين لمجموعة كثيرات حدود :

$$(i = 1, 2, \dots, m) \text{ حيث } P_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \dots + a_{i,n-1}x + a_{in}$$

وبرهن أن هذه المجموعة تكون مرتبطة خطياً أو مستقلة خطياً حسبما تكون متجهات صفوف مصفوفة معاملات كثيرات

الحدود

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مرتبطة أو مستقلة خطياً . أى حسبما تكون الرتبة r للمصفوفة A أصغر من أو تساوى m .

- ١٥ - إذا كانت كل واحدة من المجموعتين التاليتين مرتبطة خطياً ، فأوجد تركيباً خطياً لكل منهما ، يساوى الصفر .

$$\begin{array}{ll}
 P_1 = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3 & P_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\
 P_2 = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & P_2 = 2x^2 - 6x + 4 \\
 P_3 = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2 & P_3 = x^3 - 2x^2 + x
 \end{array} \quad (أ) \quad (ب)$$

$$P_1 + P_2 - 2P_3 = 0 \quad (ب) \quad 2P_1 + P_2 - 2P_3 = 0 \quad (أ)$$

١٦ - ابحث في الارتباط والاستقلال الخطيين لمجموعة المصفوفات من الدرجة 2×2 على F

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}$$

برهن أن صحة العلاقة $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = 0$ إذا كانت k (في F) ليست كلها متلاشية يتطلب أن تكون المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & s & t \end{bmatrix}$$

ذات رتبة أصغر من العدد 3 . (لاحظ أن المصفوفات M_1, M_2, M_3 معتبرة كمبرة عن متجهات ذات

أربع مركبات) مدد هذه النتيجة لمجموعة مكونة من مصفوفات من الدرجة $m \times n$.

١٧ - برهن أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

مرتبطة خطيا .

١٨ - برهن أنه يمكن كتابة أى مصفوفة درجتها 2×2 كتركيب خطي للمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و هم ماسبق على المصفوفات ذات الدرجة $n \times n$

١٩ - إذا كانت المتجهات ذات الـ n مركبة X_1, X_2, \dots, X_n مستقلة خطيا ، فبرهن أن Y_1, Y_2, \dots, Y_n حيث $Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$ مستقلة خطيا فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $A = a_{ij}$ غير شاذ .

٢٠ - إذا كانت A مصفوفة رتبها r ، بين كيف يمكن بناء مصفوفة غير شاذة B بحيث يكون $AB = [C_1, C_2, \dots, C_r, 0, \dots, 0]$

حيث C_1, C_2, \dots, C_r هي مجموعة معطية من أعمدة A المستقلة خطيا .

٢١ - لتكن النقاط : $P_1(1, 1, 1, 1), P_2(1, 2, 3, 4), P_3(2, 2, 2, 2), P_4(3, 4, 5, 6)$ أربع نقاط من فراغ

ذى أربعة أبعاد

(أ) برهن أن رتبة $[P_1, P_3]$ تساوى الواحد وأن هاتين النقطتين واقعتان على مستقيم يمر بنقطة الأصل .

(ب) برهن أن رتبة $[P_1, P_2, P_3, P_4]$ تساوى 2 وأن هذه النقاط واقعة في مستوى يمر بنقطة الأصل .

(ج) هل تقع النقطة $P_5(2, 3, 2, 5)$ في المستوى الوارد في (ب) .

٢٢ - برهن أن كل مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n على F تحقق معادلة من الشكل

$$A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \dots + k_{n-1} A + k_n I = 0$$

حيث k_i هي أعداد من F .

إرشاد : أنظر في $I, A, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}$ واستعن بالمسألة ١٦ .

٢٣ - أوجد المعادلة ذات أقل درجة (أنظر في المسألة ٢٢) والتي تتحقق بـ $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$A^2 - 2A + 2I = 0, \quad (أ) \quad A^2 - 2A + I = 0 \quad (ب) \quad A^2 - 2A = 0, \quad (ج)$$

الجواب

٢٤ - (أ) و (ب) من المسألة ٢٣ اضرب كل معادلة في A^{-1} لكي نحصل على (ب) $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

و (ج) $A^{-1} = 2I - A$. ومن ثم حقق مايلي : إذا كان A معرفا على F وغير شاذ فإنه يمكن التعبير عن A^{-1} بكثير حدود بالنسبة لـ A معاملاتها عناصر من F .

حيث $A = [a_{ij}]$ هي مصفوفة المعاملات و $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ و $H = [h_1, h_2, \dots, h_m]'$

لنعتبر الآن المصفوفة الممددة لمجموعة المعادلات (10.1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix} = [A \ H] \quad (10.4)$$

(كل صف من (10.4) هو شكل مختصر للمعادلة المناظرة من (10.1) ولإستنتاج معادلة من صف يكفى أن نضيف المجاهيل وإشارات + وإشارة - بطريقة ملائمة) .

حل مجموعة المعادلات (10.1) بواسطة المصفوفة (10.4) نطبق التحويلات الأولية للمصفوف لكي نستعير عن A بالمصفوفات القانونية الصفية المكافئة الواردة في الفصل ٥ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{مثال ١ : حل المجموعة :}$$

إن المصفوفة الممددة :

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أي أن الحل هو مجموعة المعادلات المكافئة $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ المثلة في الصورة الإتجاهية $X = [1, 0, 1]^T$

نظريات أساسية :

عندما نحول مصفوفة المعادلات A للمجموعة (10.1) إلى شكلها القانونى الصفى المكافئ C فإننا نفرض أن $[A \ H]$ قد تحولت إلى $[C \ K]$ حيث $K = [k_1, k_2, \dots, k_m]$. إذا كانت رتبة A هي r فإن الصفوف r الأولى من C تحوى عنصراً أو أكثر غير صفري . إن العنصر الأول غير الصفري في كل من هذه الصفوف يساوى الواحد أما بقية عناصر العمود الذى يقع فيه هذا الواحد فهي أصفار . وتكون الصفوف المتبقية من أصفار فقط . من الصفوف r الأولى من $[C \ K]$ يمكننا الحصول على كل من المتغيرات $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ (الرموز هي ذاتها الواردة في الفصل ٥) بدلالة المجاهيل الباقية $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_n}$ واحد من k_1, k_2, \dots, k_r .

إذا كان $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_m = 0$ فإن هذا يعنى أن (10.1) متوافقة وأى مجموعة اختيارية من القيم للمتغيرات $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_n}$ بالإضافة إلى القيم الناتجة $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ تكون حلاً . وعلى العكس إذا كان على الأقل واحد من $k_{r+1}, k_{r+2}, \dots, k_m$ يختلف عن الصفر وليكن مثلاً k_t فإن المعادلة المناظرة تكتب بالشكل

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = k_t \neq 0$$

وهذا يعنى أن المجموعة (10.1) متناقضة (متعارضة)

في الحالة التي تكون فيها المجموعة متوافقة ، يكون لـ A و $[A \ H]$ رتبة واحدة ، أما في الحالة التي لا تكون فيها المجموعة متوافقة فإن هاتين المصفوفتين رتبتين مختلفتين .

أى :

I - تكون مجموعة المعادلات $AX = H$ المكونة من m معادلة خطية في n مجهولا ، متوافقة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لمصفوفة المعاملات والمصفوفة الممددة للمجموعة رتبة واحدة .

II - في مجموعة متوافقة (10.1) ذات رتبة r حيث $n > r$ ، يمكن اختيار $(n-r)$ من المجهول بحيث تكون مصفوفة معاملات المجهول الـ r الباقية ذات رتبة مساوية r . وعندما تعطى لهذه الـ $(n-r)$ مجهولا قيم اختيارية ، فإن بقية المجهول والتي عددها r تتعين بشكل وحيد .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases} \quad \text{مثال ٢ : لمجموعة المعادلات (14) يكون}$$

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [C \ K]$$

بما أن رتبة كل من A و $[A \ H]$ واحدة ونسوى 3 فإن المجموعة المعطاة متوافقة علاوة على ذلك فإن الحل العام يحوى $1 = n - r = 4 - 3$ ثابتا اختياريا . من الصف الأخير من $[C \ K]$ ، لنفرض أن $x_4 = a$ ، حيث a عدد اختياري ، فنجد $x_1 = 10 + 11a$ و $x_2 = -2 - 4a$.

ويكون حل المجموعة هو $x_1 = 10 + 11a$ ، $x_2 = -2 - 4a$ ، $x_3 = a$ ، $x_4 = 0$

$$X = [10 + 11a, -2 - 4a, a, 0]^T \quad \text{أو}$$

إذا كان لمجموعة معادلات متوافقة على F حل وحيد (مثال ١) فإن هذا الحل ينتمي إلى F . وإذا كان لهذه المجموعة عدد لانهائي من الحلول (مثال ٢) فإن هذه الحلول تقع في F فيما إذا اختيرت القيم الاختيارية من F . ولكن المجموعة يكون لها عدد لانهائي من الحلول التي تنتمي إلى أى حقل يكون F حقلًا جزئياً منه . مثال ذلك : يكون لمجموعة معادلات المثال ٢ عدد لانهائي من الحلول على F (حقل الأعداد الجذرية) فيما إذا كان a قد اختير من بين الأعداد الجذرية ، ولها عدد لانهائي من الحلول الحقيقية فيما إذا كان اختيار a من بين الأعداد الحقيقية ولها عدد لانهائي من الحلول المركبة فيما إذا كان اختيار a من مجموعة الأعداد المركبة .

أنظر المسألتين ١ - ٢

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى المعادلة الخطية :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = h$$

معادلة غير متجانسة فيما إذا كان $h \neq 0$ وتسمى المجموعة $AX = H$ مجموعة معادلات غير متجانسة فيما إذا كان H متجهًا غير صفري . إن مجموعتي المثالين ١ و ٢ هما مجموعتين غير متجانستين .

سنبرهن في المسألة ٣

III - يكون لمجموعة مكونة من n معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، حل وحيد فيها إذا كانت رتبة مصفوفة المعاملات A مساوية n أى إذا كان $|A| \neq 0$.

بالإضافة إلى الطريقة المذكورة آنفا . سنقدم طريقتين إضافيتين لحل مجموعة متوافقة مكونة من n معادلة غير متجانسة ومتعددة المجهول $AX = H$. أولى هاتين الطريقتين هي الطريقة المعتادة باستخدام المحددات .

(١) الحل باستخدام قاعدة كرامر . ل نرمز بالرمز A_i حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$ ، للمصفوفة التى نحصل عليها

من المصفوفة A بالإستعاضة عن العمود ذى الرقم i ، بعمود المقادير الثابتة (عمود المقادير h) . فإذا كانت

$|A| \neq 0$ فإن المجموعة $AX = H$ يكون لها الحل الوحيد :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \quad (10.5)$$

أنظر المسألة ٤ .

$$\text{مثال ٣ : حل مجموعة المعادلات} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

نجد على التوالى

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240 \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -96$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{-120} = 0, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-24}{-120} = \frac{1}{5}, \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2$$

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-96}{-120} = \frac{4}{5}.$$

(ب) الحل بإستعمال A^{-1} إذا كان $|A| \neq 0$ فإنه يوجد A^{-1} ويكون حل المجموعة $AX = H$ هو

$$X = A^{-1}H \quad \text{أو} \quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1}H \quad (10.6)$$

$$\text{مثال ٤ : إن مصفوفة معاملات مجموعة المعادلات} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \text{ هي } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومن الجزء (ب) في المسألة ٢ من الفصل السابع نجد أن $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. وعلى ذلك فإن

$$A^{-1} \cdot AX = X = A^{-1}H = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ويكون حل مجموعة المعادلات هو : $x_1 = 35/18, x_2 = 29/18, x_3 = 5/18$.

أنظر المسألة ٥

المعادلات المتجانسة :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \text{إن المعادلة الخطية} \quad (10.7)$$

تسمى معادلة خطية متجانسة . ومجموعة المعادلات الخطية :

$$AX = 0 \quad (10.8)$$

ذات الـ n مجهولاً ، تسمى مجموعة معادلات متجانسة . إن رتبة مصفوفة المعاملات A لمجموعة المعادلات (10.8) هي نفسها رتبة المصفوفة الممتدة $[A \ 0]$ وعلى ذلك فهذه المجموعة تكون متوافقة دائماً . يلاحظ أن $X=0$ أى أن $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ هو دائماً حل للمجموعة يسمى هذا الحل بالحل التافه (عديم الأهمية) .

إذا كانت رتبة A مساوية n فإنه يمكن حل n معادلة من مجموعة المعادلات (10.8) باستخدام قاعدة كرامر ويكون لها حل وحيد هو $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ويكون للمجموعة الحل التافه فقط . وإذا كانت رتبة A هي r حيث $n > r$ فإن النظرية II تؤكد وجود حل غير تافه للمجموعة . وعلى ذلك .

IV - إن الشرط اللازم والكافى ليكون للمجموعة (10.8) حل بالإضافة إلى الحل التافه ، هو أن تكون رتبة A هي r حيث $n > r$.

V - أن الشرط اللازم والكافى ليكون لمجموعة مكونة من n معادلة متجانسة ذات n مجهولاً حلاً غير الحل التافه ، هو أن يكون $|A| = 0$.

VI - إذا كانت رتبة (10.8) هي r حيث $n > r$ فإن لها ، على الضبط ، $(n-r)$ حلاً مستقلة خطياً وإن كل حل آخر هو تركيب خطى من الـ $(n-r)$ حلاً وإن كل تركيب خطى لهذه الحلول هو حل أيضاً .

انظر المسألة ٦

لنفرض أن X_1 و X_2 حلان مختلفان للمجموعة $AX = H$ ، فيكون $AX_1 = H$ ، $AX_2 = H$ ، و $A(X_1 - X_2) = AY = 0$. أى أن $Y = X_1 - X_2$ حل غير تافه للمجموعة $AX = 0$.

وعلى العكس . إذا كان Z حل غير تافه للمجموعة $AX=0$ وإذا كان X_p حلاً للمجموعة $AX=H$ فإن $X = X_p + Z$ هو حل أيضاً للمجموعة $AX=H$. بما أن Z يمثل الحل التام للمجموعة $AX=0$ فإنه ينتج عن هذا أن $X_p + Z$ يمثل الحل التام للمجموعة $AX=H$ أى :

VII إذا كانت مجموعة المعادلات الغير متجانسة $AX = H$ متسقة فإننا نحصل على حل تام لهذه المجموعة بأن نضيف إلى الحل التام للمجموعة $AX = 0$ حلاً خاصاً للمجموعة $AX = H$.

مثال ٥ : في المجموعة $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ ضع $x_1 = 0$ فنجد أن $x_2 = 1$ و $x_3 = 2$ ويكون $X_p = [0, 1, 2]^t$. حلاً خاصاً لهذه المجموعة. إن الحل التام للمجموعة هو $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ ، حيث a اختياري ويكون الحل التام للمجموعة المعطاة هو $X = [-7a, a, 3a]^t + [0, 1, 2]^t = [-7a, 1+a, 2+3a]^t$

ملاحظة :

يمكن أن تمتد الطريقة السابقة على مجموعة أكبر. ومن الضروري عندها أن نبرهن أن المجموعة متسقة ومن العسير حل هذه المجموعة بطريقة المصفوفة الممددة كما أعطيت أعلاه.

مسائل محلولة

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases} \quad \text{١ - حل}$$

الحل :

إن المصفوفة الممددة

$$\begin{aligned} [A \ H] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وعلى ذلك، $x_1 = 1$ ، $x_2 - 2x_3 = 0$ ، و $x_4 + 3x_5 = 0$ لنفرض $x_3 = a$ ، $x_5 = b$

حيث a و b اختياريان. إن الحل التام يعطى بما يلي :

$$X = [1, 2a, a, -3b, b]^t. \quad \text{أو بالشكل} \quad x_1 = 1, x_2 = 2a, x_3 = a, x_4 = -3b, x_5 = b$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{٢ - حل}$$

الحل :

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

إن الصف الأخير يعطى: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -5$ ، وذلك. فالمجموعة المعطاة هي مجموعة متعارضة وليس

لها حل.

٣ - برهن أنه يكون للمجموعة $AX = H$ المكونة من n معادلة غير متجانسة في n مجهولا ، حل وحيد فيما إذا كان $|A| \neq 0$.

إذا كانت A غير شاذة فإنها تكافؤ I . ولنفرض أنه عندما نحول A إلى I بواسطة تحويلات صفية فقط، فإن $[AH]$ تحول إلى $[IK]$ ، ويكون عندها $X = K$ حلاً لهذه المجموعة .

لنفرض بعد ذلك أن $X = L$ حل آخر للمجموعة فإن $AK = H$, $AL = H$, و $AK = AL$ وبما أن A غير شاذة فإن $K = L$ وإن الحل وحيد .

۴ - استنتاج قاعدة کرامر :

لتكن مجموعة المعادلات غير المتجانسة :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \quad (I)$$

ولنرمز بالرمز A مصفوفة المعاملات $|a_{ij}|$ والرمز a_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} من A لنضرب المعادلة الأولى من (1) في a_{11} ، والمعادلة الثانية في a_{21} ، ، والمعادلة الأخيرة في a_{n1} ونجمع النتائج فنحصل على :

$$\sum_{i=1}^n a_{i1} \alpha_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^n a_{i2} \alpha_{i1} x_2 + \dots + \sum_{i=1}^n a_{in} \alpha_{i1} x_n = \sum_{i=1}^n h_i \alpha_i$$

ونجد من النظريتين X و XI والمسألة ١٠ من الفصل الثالث أن هذه العلاقة تختصر إلى الشكل :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad \text{and} \quad |A| \cdot x_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1|$$

ثم لنضرب معادلات المجموعة (1) على التوالي في a_{n2} و \dots و a_{12} ونجمع النواتج فنجد

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad \text{و} \quad |A| \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & h_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2|$$

ولنستمر على هذا المنوال ولنضرب أخيراً معادلات المجموعة (1) على التوالي في a_{1n} و a_{2n} و \dots و a_{nn} ولنجمع النتائج فنجد :

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \quad \sim, \quad |A| \cdot x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & h_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & h_n \end{vmatrix} = |A_n|$$

• - حل المجموعة

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

مستخدماً معكوس مصفوفة المعاملات

الحل :

$$\text{إن معكوس المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ هو } \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix} \text{ إذن}$$

$$X = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(أنظر المثال ٣)

$$e \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{٦ - حل}$$

الحل :

$$[A \ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن الحل التام لهذه المجموعة هو $x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$.

وبما أن رتبة المصفوفة A تساوى 2 فإننا حصل على $2 = n - r = 4 - 2$ حلاً مستقلاً خطياً . فنحصل مثلاً ، على إحدى هذه الأزواج بأن نأخذ أولاً $a = 1, b = 0$ ثم $a = 3, b = 1$ فيكون :

$$x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 3, x_4 = 1 \quad \text{و} \quad x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 1$$

ماذا يمكننا أن نقول عن زوج الحلول الذى نحصل عليه عندما نأخذ

$$a = b = 3 \quad \text{و} \quad a = b = 1$$

٧ - برهن مايلي : في مصفوفة مربعة A من الدرجة n والرتبة $(n-1)$ تكون المعاملات المرافقة لعناصر أى صفين (عمودين) من A متناسبة .

بما أن $A \cdot 0 = 0$ فإن المعاملات المرافقة لعناصر أى صف (عمود) من A هي حل X_1 للمجموعة $AX = 0$ ($A^T X = 0$).
بما أنه ليس للمجموعة سوى حل وحيد مستقل خطياً وذلك لأن رتبة A هي $(n-1)$ وعلى ذلك فللمعاملات المرافقة لنصف (عمود) آخر من A (حلاً آخر X_2 لهذه المجموعة) ونحصل على $X_2 = kX_1$.

٨ - برهن أنه إذا كانت f_1, f_2, \dots, f_m هي m حيث $n > m$ صورة خطية مستقلة في n متغير على F فإن الـ p صورة خطية

$$g_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} f_i, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

مرتبطة خطياً ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times p$ هي r حيث $p > r$.

إن الـ g 's مرتبطة خطياً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) توجد كميات عددية a_1, a_2, \dots, a_p من F ليست كلها أصفاراً وتحقق العلاقة :

بما أن الـ f' مستقلة خطيا فإن هذا يتطلب

والآن ووفقا للنظرية IV يكون لمجموعة الـ m معادلة متجانسة ذات الـ p مجهولا $\sum_{j=1}^p s_{ij} x_j = 0$ حل غير تافه

من الشكل $X = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$ وذلك إذا كان (وإذا كان فقط) رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ هي r و $p > r$.

٩ - لنفرض أن $A = [a_{ij}]$ من الدرجة n مصفوفة شاذة . برهن أنه يوجد دوما مصفوفة $B = [b_{ij}] \neq 0$ من الدرجة n بحيث يكون $AB = 0$.

افرض أن B_1, B_2, \dots, B_n هي متجهات أعمدة B . من الفرض $AB_1 = AB_2 = \dots = AB_n = 0$.

اعتبر أى واحدة من هذه العلاقات ولتكن $AB_i = 0$ أو :

بما أن مصفوفة المعاملات A شاذة فإن للمجموعة التي مجاهاها b_1t, b_2t, \dots حلاً مخالفاً للحل التافه . وبالمثل $AB_1 = 0, AB_2 = 0, \dots$ هذا حل جزئي يمثل كل منها عموداً من B .

مسائل إضافية

١٠ - أوجد كل حلول المجموعات التالية :

$x_1 = 1 + 2a - b + 3c, x_2 = a, x_3 = b, x_4 = c$ (١) : الأجوبة

$$x_1 = -7a/3 + 17/3, x_2 = 4a/3 - 5/3, x_3 = a \quad (\text{ب})$$

$$x_1 = -x_2 = 1, \quad x_3 = -x_4 = 2 \quad (2)$$

١١ - أوجد كل الحلول غير التافهة للمجموعات :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (ج) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (أ)$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases} \quad (د) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad (ب)$$

الأجوبة : (أ) : $x_1 = -3a, x_2 = 0, x_3 = a$

(ب) : $x_1 = -x_2 = -x_3 = a$

(د) : $x_1 = -\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b, x_2 = a, x_3 = \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b, x_4 = b$

١٢ - قارن حل (د) من المسألة رقم ١٠ مع حل الآخر : $x_1 = c, x_2 = d, x_3 = -\frac{10}{3}c - \frac{d}{3}, x_4 = \frac{8}{3}c + \frac{5}{3}d$

١٣ - إذا أعطيت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة B ذات الرتبة الثانية والتي تحقق العلاقة $AB = 0$

إرشاد : اختر أعمدة B من حلول $AX = 0$

١٤ - برهن أن مصفوفة مربعة تكون شاذة إذا كانت (وإذا كانت فقط) صفوفها (أعمدتها) مرتبطة خطياً .

١٥ - لنكن $AX = 0$ مجموعة من n معادلة متجانسة ذات n مجهولاً ولنفرض أن $r = n - 1$ هي رتبة A . برهن أن أى متجه غير صفري للمعاملات المرافقة $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}]$ نصف من A هو حل للمجموعة $AX = 0$.

١٦ - استخدم المسألة ١٥ لحل المجموعات :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (ج) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (أ)$$

إرشاد : أضف إلى معادلات (أ) المعادلة $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ ثم أوجد المعاملات المرافقة لعناصر الصف الثالث من

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{المصفوفة}$$

الأجوبة : (أ) : $x_1 = -27a, x_2 = 0, x_3 = 9a$ أو (ب) : $[3a, 0, -a]^T$ (ج) : $[2a, -7a, -17a]^T$ (د) : $[11a, -2a, -4a]^T$

١٧ - لنفرض أن كلا من رتبة مصفوفة معاملات مجموعة من ثلاث معادلات غير متجانسة في خمسة مجاهيل $AX = H$ ورتبة المصفوفة المدة لهذه المجموعة تساوى 2 ونفرض أن الشكل القانوني للمصفوفة المدة هو

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث لايساوى كل من c_1 و c_2 مع الصفر . لنختار أولاً $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

فند $X_1 = [c_1, c_2, 0, 0, 0]^T$ حل لـ $AX = H$ ونختار بعد ذلك $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$ ثم $x_4 = 1$

, $x_3 = x_5 = 0$ وأخيراً $x_5 = 1, x_3 = x_4 = 0$ لكي نجد حلولاً أخرى X_2 و X_3 و X_4 برهن أن الحلول

$4 = 1 + 2 - 5$ تكون مستقلة خطياً .

١٨ - اعتبر التركيب الخطي $Y = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4$ لحلول المسألة ١٧. برهن أن Y حل لـ $AX = H$ إذا كان (وإذا كان فقط) (i) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$ ، وإن Y هو الحل التام، فيما إذا كانت s_1, s_2, s_3, s_4 اختيارية ومرتبطة بالعلاقة (i) للمجموعة $AX = H$.

١٩ - برهن النظرية VI. إرشاد : اتبع المسألة ١٧ وافرض أن $c_1 = c_2 = 0$.

٢٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة درجتها $m \times p$ ورتبتها r_1 و B مصفوفة درجتها $p \times n$ ورتبتها r_2 بحيث يكون $AB = 0$ فإن $r_1 + r_2 \leq p$.
إرشاد : استعمل من النظرية VI.

٢١ - باستعمال المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة 4×5 والرتبة 2 تحقق من أنه : في مصفوفة A درجتها $m \times n$ ورتبتها r تكون المحددات المربعة ذات الدرجة r والمكونة من أعمدة المصفوفة الجزئية المكونة من أى r صفاً من المصفوفة A متناسبة مع المحددات من درجة r المكونة من أى مصفوفة جزئية أخرى تحوى r صفاً من A .

إرشاد : نفرض أن الصفين الأولين مستقلان خطياً فيكون عندها $a_{3j} = p_{31}a_{1j} + p_{32}a_{2j}$ ، $a_{4j} = p_{41}a_{1j} + p_{42}a_{2j}$ ، $(j = 1, 2, \dots, 5)$.
احسب بعد ذلك المحددات ذات الدرجة الثانية.

$$\begin{vmatrix} a_{3q} & a_{3s} \\ a_{4q} & a_{4s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{3q} & a_{3s} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{2q} & a_{2s} \end{vmatrix}$$

٢٢ - اكتب برهان النظرية الواردة في المسألة ٢١.

٢٣ - استنتج من المسألة ٧ مايلي : إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وذات رتبة تساوى $n - 1$ ، فإن العلاقات التالية بين المعاملات المرافقة تكون صحيحة :

$$\alpha_{ii}\alpha_{jj} = \alpha_{ij}\alpha_{ji} \quad (\text{ب}) \quad \alpha_{ij}\alpha_{hk} = \alpha_{ik}\alpha_{hj}, \quad (1) \\ (h, i, j, k = 1, 2, \dots, n).$$

حيث :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مكافئ صفياً لـ} \quad B = [A \ H] \quad \text{من} \quad \text{استنتج أن}$$

مجموعة من ست معادلات خطية في أربعة مجاهيل يكون لها خمس معادلات مستقلة خطياً وبرهن أن مجموعة من m حيث $n < m$ معادلة خطية ذات n مجهولاً تحوى على الأكثر $(n+1)$ معادلة مستقلة خطياً ثم برهن أنه عندما يوجد فعلاً $n+1$ معادلة مستقلة خطياً فإن المجموعة تكون غير متوافقة.

٢٥ - إذا كانت $AX = H$ مجموعة متوافقة رتبتها r . لأي مجموعة مكونة من r مجهولاً يمكن الحل ؟

٢٦ - عمم نتائج المسألة ١٧ والمسألة ١٨ على m معادلة غير متجانسة في n مجهولاً وافرض أن لمصفوفة العوامل والمصفوفة الممددة رتبة واحدة r وذلك لكي تبرهن على أنه إذا كانت للمصفوفة الممددة وللمصفوفة العوامل للمجموعة $AX = H$ المكونة من m معادلة غير متجانسة ذات n مجهولاً، رتبة واحدة مساوية r وإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n-r+1}$ حلولاً مستقلة خطياً للمجموعة، فإن :

$$X = s_1X_1 + s_2X_2 + \dots + s_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

حيث $\sum_{i=1}^{n-r+1} s_i = 1$ ، حل تام.

٢٧ - تعطى الكميات الداخلة E_1 و I_1 في شبكة كهربائية ذات أربعة أقطاب بدلالة الكميات الخارجة E_2 و I_2

بما يلي :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} E_1 &= aE_2 + bI_2 \\ I_1 &= cE_2 + dI_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} b & |A| \\ 1 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} a & -|A| \\ 1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{برهن أن}$$

حل أيضا بالنسبة لـ E_2 و I_2 ، I_1 و I_2 ، I_1 و E_2 .

٢٨ - افرض أن لمجموعة المعادلات الخطية $AX = H$ حيث $H \neq 0$ والتي عددها n معادلة في n مجهول حل وحيد . برهن أن للمجموعة $AX = K$ حل وحيد لأي متجه $K \neq 0$ له n مركبة .

$$\text{٢٩ - حل مجموعة الصور الخطية } AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

والآن اكتب حل المجموعة $AX = Y$.

٣٠ - لتكن A مصفوفة مربعة من درجة n وغير شاذة ولنفرض أن S_i حل للمجموعة $AX = E_i$ ، ($i = 1, 2, \dots, n$) . حيث E_i متجه ذو n مركبة حيث تساوى مركبته التي رقبها i الواحد وتساوى كل واحدة من بقية المركبات الصفر .
حقق المصفوفة $[S_1, S_2, \dots, S_n]$.

٣١ - لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $n > m$ ولنفرض أن S_i حل لـ $AX = E_i$ ، ($i = 1, 2, \dots, m$) . حيث E_i متجه ذو m مركبة تساوى مركبة ذات الرقم i الواحد وتساوى كل واحدة من بقية المركبات الصفر . إذا كان $K = [k_1, k_2, \dots, k_m]$ فبرهن أن

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + \dots + k_m S_m$$

هو حل للمجموعة $AX = K$

الفصل الحادى عشر

الفراغات الاتجاهية

سنمثل فيما يلى ، كل متجه بمتجه عمود ، مالم نذكر خلاف ذلك . وعندما تكون مركبات المتجه واضحة فإننا سنكتبه بالشكل $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. إن رمز منقول المصفوفة (\wedge) يشير إلى أنه يجب أن تكتب هذه العناصر فى عمود . إن مجموعة من هذه المتجهات ذات الـ n مركبة والمعروفة على F تكون مغلفة بالنسبة للجمع فيما إذا كان مجموع أى متجهين منها ، متجه من هذه المجموعة . وبالمثل تكون هذه المجموعة مغلفة بالنسبة للضرب بمقدار عددي ، فيما إذا كان حاصل ضرب أى عنصر من F بأى متجه من هذه المجموعة يعطى متجهاً من المجموعة ذاتها .

مثال ١ :

- (أ) إن مجموعة كل المتجهات $[x_1, x_2, x_3]$ من الفراغ العادى ذات المركبات المتساوية $(x_1 = x_2 = x_3)$ مغلفة بالنسبة للجمع والضرب بعدد . وذلك لأن مجموع أى متجهين من هذه المجموعة وحاصل ضرب أى متجه منها بأى عدد حقيقى k هما متجهان مركبات كل منهما متساوية أيضاً .
- (ب) إن مجموعة كل المتجهات $[x_1, x_2, x_3]$ من الفراغ العادى مغلفة بالنسبة للجمع والضرب بعدد .

الفراغات الاتجاهية :

إن كل مجموعة من المتجهات ذات الـ n مركبة على F مغلفة بالنسبة للجمع والضرب بمقدار عددي تدعى فراغاً اتجاهياً وهكذا . إذا كان X_1, X_2, \dots, X_m متجهات ذات n مركبة على F فإن مجموعة كل التراكيب (التآلفات) الخطية :

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_m X_m \quad (11.1)$$

حيث $(F \text{ في } k_i)$ هى فراغ اتجاهى على F . مثال ذلك أن كلا من مجموعى المتجهات الواردة فى (أ) و (ب) من المثال ١ فراغ اتجاهى ، ومن الواضح أن كل فراغ اتجاهى من الشكل (11.1) يحوى صفر المتجهات ذات الـ n مركبة . وأن المتجه الصفري ذا الـ n مركبة بمفرده هو فراغ اتجاهى . (يسمى الفراغ (11.1) أيضاً فراغاً اتجاهياً خطياً) .

إن المجموعة الكلية $V_n(F)$ لكل المتجهات ذات الـ n مركبة على F تدعى فراغاً اتجاهياً من البعد n على F

الفراغ الجزئى :

نقول عن مجموعة V من المتجهات $V_n(F)$ إنها فراغ جزئى من $V_n(F)$ فيما إذا كانت V مغلفة بالنسبة للجمع والضرب بمقدار عددي وهكذا فإن صفر المتجهات ذات الـ n مركبة هو فراغ جزئى من $V_n(F)$ وكذلك الحال بالنسبة إلى $V_n(F)$ ذاته . إن المجموعة (أ) الواردة فى المثال ١ هى فراغ جزئى (خط) من الفراغ العادى . عموماً إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_m متمية إلى $V_n(F)$ فإن فراغ جميع التراكيب الخطية (11.1) يكون فراغاً جزئياً من $V_n(F)$.

نقول عن فراغ اتجاهى V إنه مولد بالمتجهات X_1, X_2, \dots, X_m ذات الـ n مركبة فيما إذا تحقق (أ) X_i متمية إلى V (ب) كل متجه من V هو تركيب خطى (11.1) للمتجهات المفروضة . نلاحظ أنه ليس من الضروري أن نقصر المتجهات X_1, X_2, \dots, X_m على الحالة التى تكون فيها مستقلة خطياً .

مثال ٢ :

ليكن F حقل الأعداد الحقيقية R ولتكن المتجهات ذات الثلاث مركبات $X_1 = [1.1.1]'$, $X_2 = [1.2.3]'$, $X_3 = [1.3.2]'$, $X_4 = [3.2.1]'$ الواقعة في الفراغ العادى $S = V_3(R)$. إن كل متجه $[a.b.c]'$ من S يمكن التعبير عنه كـ :

$$y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن مجموعة المعادلات الناتجة

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 &= a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &= c \end{aligned} \quad (i)$$

متوافقة وتكون المتجهات X_1, X_2, X_3, X_4 مولدة لـ S

إن المتجهين X_1 و X_2 مستقلان خطياً فهما يولدان فراغاً جزئياً (المستوى π) من S يحوى كل متجه من الشكل $hX_1 + kX_2$ حيث h و k عددان حقيقيان .

يولد المتجه X_4 فراغاً جزئياً (الخط L) من S وهو يحوى كل متجه من الشكل hX_4 حيث h عدد حقيقى .
 أنظر المسألة ١

الأساس والبعد :

نعنى ببعد فراغ إتجاهى V أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطياً . الواقعة في V أو بشكل مكافئ . أصغر عدد من المتجهات المستقلة خطياً يكفى لتوليد V . في علم الهندسة الأولية ، يعتبر الفراغ العادى فراغاً ذا ثلاثة أبعاد للنقط (a, b, c) وسنعتبره هنا كفراغ ذو ثلاثة أبعاد للمتجهات $[a, b, c]$. إن المستوى π الوارد في المثال ٢ ذو بعدين وإن الخط L ذو بعد واحد .
 يرمز لفراغ إتجاهى بعده r ومكون من n متجهاً بالشكل $V_n^r(F)$ وعندما تكون $r = n$ فن المقبول كتابة $V_n(F)$ بدلا من $V_n^n(F)$

تدعى أى مجموعة مكونة من r متجهاً مستقلة خطياً من $V_n^r(F)$ أساساً لهذا الفراغ . ويكون عندها . كل متجه من هذا الفراغ تركيباً خطياً وحيداً لمتجهات الأساس . إن لكل قواعد الفراغ $V_n^r(F)$ عدد واحد من المتجهات وإن أى r متجهاً مستقلة خطياً تصلح أساساً لهذا الفراغ .

مثال ٣ :

إن المتجهات X_1, X_2, X_3 الواردة في المثال ٢ تولد S لأنه يمكن التعبير عن أى متجه $[a, b, c]'$ من S بالشكل :

$$y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

إن لمجموعة المعادلات الناتجة $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = c \end{cases}$ على التقيض من (i) حل وحيد . إن المتجهات X_1, X_2, X_3 هى أساس الفراغ S . إن المتجهات X_1, X_2, X_4 ليست أساساً لـ S (برهن ذلك) . إنها تولد الفراغ الجزئى π من المثال ٢ الذى أساسه المجموعة X_1, X_2 .

إن النظريات $I - V$ الواردة في الفصل التاسع قابلة للتطبيق هنا طبعاً . على وجه الخصوص فإن النظرية IV يمكن إعادة صياغتها على النحو التالى :

I. إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_m هى مجموعة من المتجهات ذات n مركبة على F وإذا كانت r رتبة المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ لمركبات هذه المتجهات، فإنه يمكن الاختيار ، من هذه المتجهات ، r متجها فقط مستقلة خطياً تولد الفراغ $V_n^r(F)$ الذى يحوى الـ $(m-r)$ متجها الباقية .

أنظر المسألتين ٢ - ٣

إن لما يلى من نظريات أهمية خاصة :

II. إذا كان X_1, X_2, \dots, X_m هى m حيث $n > m$ متجها ذات n مركبة ومستقلة خطياً من $V_n(F)$ وإذا كانت $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n$ هى أى $(n-m)$ متجها من $V_n(F)$ أيضاً والى تكون مع X_1, X_2, \dots, X_m مجموعة مستقلة خطياً فإن المجموعة X_1, X_2, \dots, X_n تكون أساس الفراغ $V_n(F)$.

أنظر المسألة ٤

III. إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_m هى m حيث $n > m$ متجها ذات n مركبة ومستقلة خطياً على F فإن الـ p متجها

$$Y_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} X_i \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

تكون مرتبطة خطياً فيما إذا كان $m < p$ أو ، عندما يكون $m \geq p$ إذا كانت رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ هى r حيث $p > r$

IV. إذا كانت المتجهات X_1, X_2, \dots, X_n ذات n مركبة ومستقلة خطياً على F ، فإن المتجهات $Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ تكون مستقلة خطياً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) $[a_{ij}]$ غير شاذة

الفراغات الجزئية المتطابقة :

إذا كان $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ فراغين جزئيين من $V_n(F)$ فإنهما يكونان متطابقين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) كل منهما من $V_n^h(F)$ هو متجه من $V_n^k(F)$ والعكس أى إذا كان وإذا كان فقط كل واحد منهما فراغاً جزئياً من الآخر .
أنظر المسألة ٥

مجموع وتقاطع فراغين :

ليكن $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ فراغين إتجاهيين نعى بمجموع هذين الفراغين مجموعة كل المتجهات $X + Y$ حيث X من $V_n^h(F)$ و Y من $V_n^k(F)$ ومن الواضح أن هذا فراغ إتجاهى نسميه فراغ المجموع ونرمز له بالرمز $V_n^s(F)$.
إن البعد s لفراغ مجموع فراغين إتجاهيين لايزيد على مجموع بعدى هذين الفراغين .

ونعى بتقاطع فراغين إتجاهيين كل المتجهات المشتركة بين هذين الفراغين إذا كان X متجها مشتركاً بين هذين الفراغين فإن $aX + bY$ مشترك بينهما أيضاً وكذلك إذا كان X و Y متجهين مشتركين بين الفراغين المذكورين فإن $aX + bY$ واقع فى تقاطعهما وهذا يؤدى إلى أن تقاطع فراغين إتجاهيين هو فراغ إتجاهى ندعوه فراغ التقاطع ونرمز له بالرمز $V_n^t(F)$. إن بعد فراغ التقاطع لايزيد عن أصغر بعدى الفراغين المفروضين

V. إذا كان لفراغين إتجاهيين $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ مجموع $V_n^s(F)$ وتقاطع $V_n^t(F)$ فإن $h + k = s + t$

مثال ٤ :

ليكن الفراغ الجزئى π_1 المولد بالمتجهين X_1 و X_2 من المثال ٢ والفراغ الجزئى π_2 المولد بالمتجهين X_3 و X_4 .
أن بما π_1 و π_2 غير متطابقين (برهن ذلك) وبما أن هذه المتجهات الأربعة تولد S فإن فراغ مجموع π_1 و π_2 هو S .

والآن بما أن $X_4 = X_2 - 4X_1$ فإن X_4 ينتمى فى الوقت ذاته . إلى π_1 و π_2 إن الفراغ الجزئى (الخط L) المولد بـ X_4 هو إذن تقاطع الفراغين π_1 و π_2 . يلاحظ أن بعد كل من π_1 و π_2 هو 2 وأن بعد S يساوى 3 بينما بعد L يساوى الواحد . وهذا يتفق مع النظرية V .

أنظر المسائل ٦ - ٨

انعدامية (صفرية) مصفوفة :

تكون حلول مجموعة متجانسة من المعادلات الخطية $AX = 0$ فراغاً اتجاهياً نسميه الفراغ الصفرى للمصفوفة A . يسمى بعد هذا الفراغ والذي نرمز له بالرمز N_A بصفرية A (انعدامية A) .

وإذا تذكرنا النظرية VI من الفصل العاشر فإننا نجد :

VI . إذا كانت N_A هى صفرية A فإن المجموعة $AX = 0$ يكون لها N_A حلاً مستقلة خطياً X_1, X_2, \dots, X_{N_A} وبحيث يكون كل حل من حلول المجموعة $AX = 0$ هو تركيب خطى لهذه الحلول وكل تركيب خطى لهذه الحلول حل للمجموعة . إن أساس الفراغ الصفرى لـ A هو أى مجموعة من N_A من الحلول المستقلة خطياً لـ $AX = 0$.

أنظر المسألة ٩

VII . لـ أى مصفوفة A درجتها $m \times n$ ورتبتها r_A وصفريتها N_A تتحقق العلاقة :

$$r_A + N_A = n \quad (11.2)$$

قوانين سيلفستر الانعدامية :

إذا كانت A و B مصفوفتين من درجة n وكانت رتبتهما على الترتيب r_A و r_B فإن رتبة وانعدامية حاصل ضربهما AB تحقق المتباينات

$$\begin{aligned} r_{AB} &\geq r_A + r_B - n \\ N_{AB} &> N_A, \quad N_{AB} > N_B \end{aligned} \quad (11.3)$$

أنظر المسألة ١٠

$$N_{AB} \leq N_A + N_B$$

الأساس والأحداثيات :

تسمى المتجهات ذات الـ n مركبة :

$$E_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]', \quad E_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]', \quad \dots, \quad E_n = [0, 0, 0, \dots, 1]'$$

متجهات أولية أو متجهات وحدة معرفة على F . يسمى المتجه الأول E_j الذى مركبته ذات الرقم j تساوى الواحد ، المتجه الأول ذا الرقم j ، تؤلف المتجهات الأولية E_1, E_2, \dots, E_n أساساً هامة للفراغ $V_n(F)$.

يمكن التعبير عن كل متجه $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ من $V_n(F)$ بشكل وحيد ، بالمجموع

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n$$

للمتجهات الأولية . فى هذه الحالة تسمى المركبات x_1, x_2, \dots, x_n للمتجه X احداثيات X بالنسبة للأساس E . سنتعبّر بعد الآن ، إلا إذا أُشير بغير ذلك ، أن كل متجه X معطى منسوباً لهذا الأساس .

نفرض أن Z_1, Z_2, \dots, Z_n أساس آخر لـ $V_n(F)$. توجد مقادير عددية وحيدة a_1, a_2, \dots, a_n من F بحيث يكون :

$$X = \sum_{i=1}^n a_i Z_i = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \dots + a_n Z_n$$

تسمى المقادير العددية a_1, a_2, \dots, a_n احداثيات المتجه X بالنسبة للأساس Z . إذا كتبنا $X_Z = [a_1, a_2, \dots, a_n]'$ فإننا نجد :

$$X = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n] X_Z = Z \cdot X_Z \quad (11.4)$$

حيث Z هى مصفوفة أعمدتها هى متجهات الأساس Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

مثال ٥ :

إذا كانت $Z_1 = [2, -1, 3]'$, $Z_2 = [1, 2, -1]'$, $Z_3 = [1, -1, -1]'$ وكان $V_3(F)$ أسس $X_Z = [1, 2, 3]'$ هو متجهها من $V_3(F)$ منسوباً إلى هذه القاعدة ، فإننا نجد :

$$X = [Z_1, Z_2, Z_3] X_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = [7, 0, -2]'$$

منسوبة للأساس E .

أنظر المسألة ١١

افرض أن W_1, W_2, \dots, W_n أسس آخر لـ $V_n(F)$ وافرض أن $X_W = [b_1, b_2, \dots, b_n]'$ بحيث يكون :

$$X = [W_1, W_2, \dots, W_n] X_W = W \cdot X_W \quad (11.5)$$

نستنتج من (11.4) و (11.5) أن $X = Z \cdot X_Z = W \cdot X_W$

$$X_W = W^{-1} \cdot Z \cdot X_Z = P X_Z \quad (11.6) \text{ و}$$

حيث $P = W^{-1}Z$ ويكون :

VIII إذا كانت X_W و X_Z احداثيات متجه من الفراغ $V_n(F)$ بالنسبة لأساسين لهذا الفراغ فإنه يوجد مصفوفة

غير شاذة P معينة بشكل وحيد بهذين الأساسين ومعطية بـ (١١-٦) بحيث يكون $X_W = P X_Z$.

انظر المسألة ١٢

مسائل محلولة

١ - إن مجموعة كل المتجهات $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ حيث $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ هى فراغ جزئى V

من $V_4(F)$ لأن مجموع أى متجهين من هذه المجموعة وحاصل ضرب أى متجه منها بأى مقدار عددي يكون متجهها مجموع مركباته يساوى الصفر ، أى أنها متجهان فى هذه المجموعة .

$$X_1 = [1, 2, 2, 1]', X_2 = [3, 4, 4, 3]'$$

تساوى 2 فإن المتجهات

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ - بما أن رتبة المصفوفة

و $X_3 = [1, 0, 0, 1]'$ مرتبطة خطياً وتولد فراغاً اتجاهياً $V_4^2(F)$ أى أن متجهين من المتجهات المفروضة مستقلة خطياً وهذا يعنى أنه يمكننا أن نأخذ X_1 و X_2 و X_3 أو X_2 و X_3 ، كقاعدة للفراغ الاتجاهى $V_4^2(F)$.

$$X_2 = [4, 3, 2, -1]', X_1 = [1, 1, 1, 0]'$$

من الرتبة الثانية فإن المتجهات

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

٣ - بما أن

و $X_3 = [2, 1, 0, -1]'$ مرتبطة خطياً وأنها تولد فراغاً $V_4^2(F)$.

يمكننا أن نأخذ كأساس لهذا الفراغ ، أى زوج من المتجهات الأربعة ماعدا الزوج X_3 و X_4 .

٤ - أن المتجهات X_1 و X_2 و X_3 الواردة فى المسألة ٢ تقع فى $V_4(F)$. أوجد أساساً لهذا الفراغ .

يمكننا أن نأخذ أساساً لهذا الفراغ المتجهات X_2, X_1 ، $X_4 = [1, 0, 0, 0]'$ و $X_5 = [0, 1, 0, 0]'$ أو X_2, X_1 ، $X_8 = [1, 2, 3, 4]'$ و $X_7 = [1, 3, 6, 8]'$ وذلك لأن المصفوفتين $|X_1, X_2, X_4, X_5|$ و $|X_1, X_2, X_6, X_7|$ من الرتبة الرابعة .
 • - لتكن $X_1 = [1, 2, 1]'$ ، $X_2 = [1, 2, 3]'$ ، $X_3 = [3, 6, 5]'$ ، $Y_1 = [0, 0, 1]'$ ، $Y_2 = [1, 2, 5]'$ متجهات من $V_3(F)$. برهن أن الفراغ المولد بالمتجهات X_1, X_2, X_3 والفراغ المولد - بالمتجهين Y_1 و Y_2 متطابقان .
 لتلاحظ أولاً أن X_1 و X_2 مستقلان خطياً بينما $X_3 = 2X_1 + X_2$ وهذا يعنى أن X_3 تولد فراغاً اتجاهياً بعد 2 وليكن ${}_1V_3^2(F)$. وأن Y_1 متجهين مستقلين خطياً يولدان فراغاً اتجاهياً بعده 2 وليكن ${}_2V_3^2(F)$.

بعد ذلك $X_1 = Y_2 - 4Y_1$ ، $X_2 = Y_2 - 2Y_1$ ، $Y_1 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_1$ ، وهكذا نجد أن أى متجه $aY_1 + bY_2$ من ${}_2V_3^2(F)$ هو متجه $(\frac{1}{2}a + b)X_2 - (\frac{1}{2}a + b)X_1$ من ${}_1V_3^2(F)$ ونجد بالطريقة ذاتها أن أى متجه $cX_1 + dX_2$ من ${}_1V_3^2(F)$ هو متجه $(c+d)Y_1 - (4c+2d)Y_2$ من ${}_2V_3^2(F)$ وهذا يؤدى إلى أن الفراغين متطابقين .

٦ - (ا) إذا كان $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ واقعاً فى $V_3^2(F)$ المولد بالمتجهين $X_1 = [1, -1, 1]$ و $X_2 = [3, 4, -2]$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -1 & 4 \\ x_3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0.$$

فإن

(ب) إذا كان $X = [x_1 x_2 x_3 x_4]$ واقعاً فى الفراغ $V_4^2(F)$ المولد بالمتجهين $X_1 = [1, 1, 2, 3]$ و $X_2 = [1, 0, -2, 1]$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{فإن} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{من الرتبة الثانية. بما أن} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \quad \text{فإن ذلك يتطلب}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \quad \text{و}$$

إن هذه المسائل توضح أن كل فراغ اتجاهى $V_n^k(F)$ يمكن تعريفه ك مجموعة كل الحلول على F لمجموعة مكونة من $(n-k)$ معادلة متجانسة ومستقلة خطياً معرفة على F وذات n مجهولاً .

٧ - برهن أنه إذا كان $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ مجموع وتقاطع الفراغين الاتجاهيين $V_n^s(F)$ و $V_n^t(F)$ ، $h+k = s+t$.

لنفرض أن $h = t$ فينتج عن ذلك أن $V_n^h(F)$ فراغ جزئى من $V_n^k(F)$ وأن مجموعهما هو $V_n^k(F)$ نفسه ويكون عندها

$$s = k, t = h \quad \text{وهذا يؤدى إلى} \quad s+t = h+k \quad \text{ويمكن للقارىء أن يبرهن على أن هذا يكون صحيحاً أيضاً إذا كان} \quad t = k$$

لنفرض . بعد ذلك أن $h > t$ و $k > t$ وليكن X_1, X_2, \dots, X_t مولدة لـ $V_n^t(F)$ من النظرية ٦ . يوجد متجهات

$Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_h$ بحيث تولد المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_t, Y_{t+1}, \dots, Y_h$ الفراغ $V_n^k(F)$ كما يوجد متجهات $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_k$ بحيث تولد المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_t, Z_{t+1}, \dots, Z_k$ الفراغ $V_n^k(F)$.

لنفرض الآن أنه يوجد أعداد a وأعداد h بحيث يكون

$$\sum_{i=1}^t a_i X_i + \sum_{i=t+1}^h a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^k b_i Z_i = 0 \quad (11.4)$$

$$\sum_{i=1}^t a_i X_i + \sum_{i=t+1}^h a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^k -b_i Z_i \quad \text{أو}$$

أن المتجه على الشمال يتبع $V_n^h(F)$ ، وبسبب الطرف الأيمن منها ، فإنه يتبع أيضاً $V_n^k(F)$. فهو إذن يتبع $V_n^t(F)$. ولكن X_1, X_2, \dots, X_t تولد الفراغ $V_n^t(F)$ فينتج عن ذلك أن $a_{t+1} = a_{t+2} = \dots = a_h = 0$.

$$\sum_{i=1}^t a_i X_i + \sum_{i=t+1}^h b_i Z_i = 0 \quad (11.4) \text{ والآن من}$$

ولكن X 's و Z 's مستقلة خطياً فيكون إذن $a_1 = a_2 = \dots = a_t = b_{t+1} = b_{t+2} = \dots = b_h = 0$; وهكذا تكون المتجهات Z 's و Y 's و X 's مجموعة مستقلة خطياً ومولدة للفراغ $V_n^s(F)$ أى أن $s = h + k - t$. قد تحققت .

٨ - ليكن الفراغ الاتجاهى $V_3^2(F)$ الذى يكون $X_1 = [1, 2, 3]^t$ و $X_2 = [1, 1, 1]^t$ أساساً له والفراغ الاتجاهى $V_3^2(F)$ الذى يكون $Y_1 = [3, 1, 2]^t$ و $Y_2 = [1, 0, 1]^t$ أساساً له . بما أن مصفوفة المركبات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

من الرتبة الثالثة فإن فراغ المجموع هو $V_3(F)$. يمكننا أن نأخذ X_1 و X_2 و Y_1 كأساس له .

ينتج من $h + k = s + t$ أن فراغ التقاطع يكون $V_3^1(F)$. لكى نوجد أساساً نسوى بين تركيبين خطيين للمتجهات منسوبة إلى أساس كل من $V_3^2(F)$ و $V_3^2(F)$ بالشكل التالى :

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2$$

$$\text{لنأخذ } d = 1 \text{ للتيسير ، ولنحل مجموعة المعادلات } \begin{cases} a + b - 3c = 1 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 1 \end{cases} \text{ فنجد } a = 1/3, b = -4/3, c = -2/3.$$

أى أن $aX_1 + bX_2 = [-1, -2/3, -1, 3]^t$ قاعدة لفراغ التقاطع ونجد أيضاً أن المتجه $[3, 2, 1]^t$ قاعدة للفراغ المذكور .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad ٩ - \text{أوجد أساس الفراغ المعلوم للمصفوفة}$$

اعتبر مجموعة المعادلات $AX = 0$ التى يمكن اختصارها للمجموعة $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ إن أساس الفراغ الصفرى للمصفوفة A تتكون من الحلين المستقلين خطياً لهذه المجموعة وهما : $[1, 2, 0, -1]^t$ و $[2, 1, -1, 0]^t$.

$$١٠ - \text{برهن أن } r_2 \geq r_1 + r_3 - n$$

نفرض أولاً ، أن A من الشكل $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فتكون r_A صفّاً الأول من AB هى r_A صفّاً الأول من B بينما تكون الصفوف الباقية أصفاراً . من المسألة ١٠ من الفصل الخامس تكون رتبة AB محققة للعلاقة $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.
نفرض ، بعد ذلك ، أن A ليست من الشكل السابق الذكر فيوجد إذن مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون PAQ ذلك الشكل بيّناً تكون رتبة $PAQB$ مساوية على التام رتبة AB (لماذا ؟)

$$\text{يمكن للقارئ أن يعتبر الحالة الخاصة التى يكون فيها } B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

١١ - ليكن المتجه $X = [1, 2, 1]^t$ منسوباً للأساس E . أوجد مركباته منسوباً للأساس الجديد $Z_1 = [1, 1, 0]^t$ ، $Z_2 = [1, 0, 1]^t$ و $Z_3 = [1, 1, 1]^t$.

الحل (١) لنكتب :

$$a = 0, b = -1, \text{ ونجد أخيراً } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + c = 2 \\ b + c = 1 \end{cases} \text{ فينتج } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ أى } X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3, \quad (i)$$

$c = 2$ ويكون $X_Z = [0, -1, 2]'$ منسوباً للأساس Z

الحل (ب) بإعادة كتابة (i) بالشكل $X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = ZX_Z$ فيكون :

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, -1, 2]'$$

١٢ - افرض X_Z و X_W كاحداثيات المتجه X بالنسبة للأساسين $Z_1 = [1, 1, 0]'$, $Z_2 = [1, 0, 1]'$, $Z_3 = [1, 1, 1]'$ و $W_1 = [1, 1, 2]'$, $W_2 = [2, 2, 1]'$, $W_3 = [1, 2, 2]'$. و $X_W = PX_Z$ بحيث يكون

$$W^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{و} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Z = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ بما أن}$$

$$P = W^{-1}Z = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ فإنه يكون}$$

(١١-٦) استناداً إلى

مسائل إضافية

١٣ - ليكن $[x_1, x_2, x_3, x_4]'$ متجهها اختيارياً من $V_4(R)$ حيث R ترمز لحقل الأعداد الحقيقية بين أى من المجموعات التالية فراغات جزئية من $V_4(R)$ ؟

- جميع المتجهات التي يكون لها $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها $x_1 = x_2, x_3 = 2x_4$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها $x_4 = 0$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها $x_1 = 1$.
 - جميع المتجهات التي يكون لها x_1, x_2, x_3, x_4 أعداد صحيحة.
- الجواب : كلها عدا (د) و (هـ) فراغات جزئية.

١٤ - برهن أن $[1, 1, 1, 1]'$ و $[2, 3, 3, 2]'$ أساس $V_4(F)$ الوارد في المسألة ٢

١٥ - عين بعد الفراغ الإتجاهي المولد بكل واحدة من مجموعات المتجهات التالية ثم اختر أساساً لكل منها

$$\begin{array}{lll} [1, 1, 1, 1]' & [1, 1, 0, -1]' & [1, 2, 3, 4, 5]' \\ [3, 4, 5, 6]' & [1, 2, 3, 4]' & [5, 4, 3, 2, 1]' \\ [1, 2, 3, 4]' & [2, 3, 3, 3]' & [1, 1, 1, 1, 1]' \\ [1, 0, -1, -2]' & & \end{array} \quad (أ) \quad (ب) \quad (١)$$

الجواب : (أ) ، (ب) ، (ج) $r = 2$

١٦ - برهن أن المتجهين $X_1 = [1, -1, 1]'$ و $X_2 = [3, 4, -2]'$ يولدان الفراغ ذاته الذى يولده المتجهان $Y_1 = [9, 5, -1]'$ و $Y_2 = [-17, -11, 3]'$

(ب) برهن أن المتجهين $X_1 = [1, -1, 1]'$ و $X_2 = [3, 4, -2]'$ لا يولدان الفراغ ذاته الذى يولده المتجهان $Y_1 = [-2, 2, -2]'$ و $Y_2 = [4, 3, 1]'$

١٧ - برهن أنه إذا كانت مجموعة المتجهات X_1, X_2, \dots, X_k أساساً للفراغ $V_n^k(F)$ فإنه يمكن كتابة أى متجه

آخر Y من هذا الفراغ ، بشكل وحيد ، كتركيب خطى لـ X_1, X_2, \dots, X_k

$$\text{إرشاد : افرض أن } Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i = \sum_{i=1}^k b_i X_i$$

١٨ - لتكن المصفوفة ذات الدرجة 4×4 متجهات أعمدها هى متجهات أساس الفراغ $V_4^2(R)$ من المسألة ٢ أساس

الفراغ $V_4^2(R)$ من المسألة ٣ . برهن أن رتبة هذه المصفوفة تساوى ٤ . وهكذا يكون $V_4(R)$ فراغ مجموع الفراغين المذكورين و $V_4^0(R)$ ، فراغ الصفر ، هو فراغ تقاطع هذين الفراغين .

١٩ - تتبع البرهان المعطى فى المسألة ٨ فى الفصل العاشر لبرهان النظرية III .

٢٠ - برهن على أن بعد الفراغ المولد بـ $[1, 0, 0, 1, 1]'$ ، $[0, 0, 1, 0, 0]'$ ، $[1, 0, 1, 0, 0]'$ ، $[0, 0, 0, 0, 1]'$ ، $[1, 0, 0, 0, 0]'$

هو البعد الرابع وأن بعد الفراغ المولد بـ $[0, 1, 1, 1, 0]'$ ، $[1, 0, -1, 0, 1]'$ ، $[0, 1, -2, 1, 0]'$ ، $[0, 1, 0, 1, 0]'$ ، $[1, 0, 0, 0, 1]'$ هو البعد الثالث . برهن أن $[1, 0, 1, 0, 1]'$ و $[1, 0, 2, 0, 1]'$ يؤلفان أساساً لتقاطع هذين الفراغين .

٢١ - أوجد ، بالنسبة للأساس $Z_1 = [1, 2, 2]'$ ، $Z_2 = [2, 2, 1]'$ ، $Z_3 = [1, 1, 2]'$ ، احداثيات كل من المتجهات :

$$(أ) [1, 1, 0] \quad (ب) [1, 0, 1] \quad (ج) [1, 1, 1]$$

الجواب : (أ) $[-1/3, 2/3, 0]'$ ، (ب) $[4/3, 1/3, -1]'$ ، (ج) $[1/3, 1/3, 0]'$

٢٢ - أوجد بالنسبة للأساس $Z_1 = [0, 1, 0]'$ ، $Z_2 = [1, 1, 1]'$ ، $Z_3 = [3, 2, 1]'$ احداثيات المتجهات

$$(أ) [2, -1, 0] \quad (ب) [1, -3, 5] \quad (ج) [0, 0, 1]$$

الجواب : (أ) $[-2, -1, 1]'$ ، (ب) $[-6, 7, -2]'$ ، (ج) $[-1/2, 3/2, -1/2]'$

٢٣ - لتكن X_w و X_z مركبات متجه X بالنسبة لزوج الأساسين المعطيين أوجد المصفوفة P المحققة للعلاقة : $X_w = P X_z$

$$(أ) \quad Z_1 = [1, 0, 0]', \quad Z_2 = [1, 0, 1]', \quad Z_3 = [1, 1, 1]'$$

$$(ب) \quad W_1 = [0, 1, 0]', \quad W_2 = [1, 2, 3]', \quad W_3 = [1, -1, 1]'$$

$$\text{الجواب : (أ) } P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢٤ - أثبت أنه إذا كان P_j حلاً لمجموعة $AX = E_j$ ، $(j = 1, 2, \dots, n)$ ، فإن $\sum_{i=1}^n h_j P_j$ حل للمجموعة

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_n]'$$

$$\text{إرشاد : } H = h_1 E_1 + h_2 E_2 + \dots + h_n E_n$$

٢٥ - يسمى الفراغ الاتجاهى المؤلف من كل التراكيب الخطية لمتجهات أعمدة مصفوفة A ، فراغ الأعمدة لـ A ويسمى

الفراغ المعروف بكل التراكيب الخطية لصفوف المصفوفة A فراغ الصفوف لـ A برهن أن أعمدة AB واقمة فى فراغ لأعمدة لـ A وأن صفوف AB واقمة فى فراغ الصفوف لـ A .

٢٦ - برهن أن المجموعة $AX = H$ المكونة من m معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، تكون متوافقة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) المتجه H متتميا إلى فراغ الأعمدة لـ A .

$$٢٧ - \text{أوجد أساس الفراغ المعلوم للمصفوفتين (١) ، (ب) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

الجواب (١) $[1, 1, -1]^T$ (ب) $[1, 1, -1, -1]^T$ ، $[1, 2, -1, -2]^T$

٢٨ - برهن أن : (١) $N_{AB} \geq N_A$ ، $N_{AB} \geq N_B$ (ب) $N_{AB} \leq N_A + N_B$

الإرشاد : (١) $N_{AB} = n - r_{AB}$ و $r_A \geq r_{AB}$ و $r_B \geq r_{AB}$

(ب) اعتبر $(n - r_{AB})$ و طبق النظرية الواردة في المسألة ١٠

٢٩ - استنتج طريقة لحل المسألة ١٦ مستعملا فقط تحويلات أعمدة على $A = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ ثم أعد حل المسألة رقم د

نظريات أساسية :

إذا فرضنا في (12.1) أن $X = [1, 0, \dots, 0]' = E_1$ فإن $Y = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}]'$ وبصورة عامة إذا كان $X = E_i$ فإن $Y = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}]'$ أى .

I - يمين التحويل الخطى (12.1) تعينا وحيداً عندما نعرف أخيلة قاعدة الفراغ الإتجاهى الذى عرف عليه هذا التحويل . أن أعمدة المصفوفة A هى على الترتيب احداثيات أخيلة هذه المتجهات .

انظر المسألة ١

يقال عن التحويل الخطى (12.1) إنه غير شاذ فيما إذا كانت خيالات المتجهات المتميزة X_i هى متجهات مختلفة متميزة Y_i وفى الحالة المعاكسة نصف هذا التحويل بأنه شاذ .

II - يكون التحويل الخطى (12.1) غير شاذ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A ، مصفوفة التحويل الخطى غير شاذة .

انظر المسألة ٢

III - يحول التحويل الخطى غير الشاذ مجموعة مستقلة (غير مستقلة) خطياً إلى مجموعة مستقلة (غير مستقلة) خطياً .

انظر المسألة ٣

ينتج عن النظرية III مايل :

IV - بتطبيق التحويل الغير شاذ (12.1) فإن خيال فراغ $V_n^k(F)$ يكون فراغاً إتجاهياً $V_n^k(F)$ أى أن بعد الفراغ الإتجاهى قد حفظ . بصورة خاصة إن التحويل الخطى لـ $V_n(F)$ هو تقابل لهذا الفراغ مع نفسه . عندما تكون A غير شاذة ، فإن عكس (12.1)

$$X = A^{-1}Y$$

يحول المتجهات Y_1, Y_2, \dots, Y_n التى تكون مركباتها هى أعمدة A إلى متجهات أساس الفراغ الإتجاهى . وإن هذا التحويل هو تحويل خطى أيضاً .

V - إن من الممكن إيجاد تحويل خطى غير شاذ يحول مجموعة المتجهات الأولية E_i للفراغ الإتجاهى $V_n(F)$ إلى أى مجموعة مكونة من n متجهاً ذا n مركبة مستقلة خطياً والعكس صحيح .

VI - إذا حول $Y = AX$ متجهاً X إلى متجهاً Y وإذا حول $Z = BY$ المتجهاً Y إلى Z وإذا حول $W = CZ$ فإن $Z = BY = (BA)X$ يحول X إلى Z وإن $W = (CBA)X$ يحول X إلى W .

VII - إذا أعطيت مجموعتان تتكون كل واحدة منها من n متجهاً ذات n مركبة مستقلة خطياً ، فإنه يوجد تحويل خطى غير شاذ يحول متجهات واحدة منها إلى متجهات أخرى .

تغيير الأساس :

لنفرض أن $Y_z = AX_z$ تحويل خطى للفراغ الإتجاهى $V_n(F)$ منسوباً للأساس Z . ولنفرض أنه قد تغير الأساس ولنفرض أن X_w و Y_w تمثل احداثيات X_z و Y_z فى الأساس الجديد . استناداً إلى النظرية VIII من الفصل ١١ ، يوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $X_w = PX_z$ و $Y_w = PY_z$ أو يوضع $P^{-1}Q$ بحيث يكون

$$Y_z = Q Y_w \text{ و } X_z = Q X_w$$

$$Y_w = Q^{-1}Y_z = Q^{-1}AX_z = Q^{-1}AQX_w = BX_w \text{ فإن}$$

$$B = Q^{-1}AQ \text{ حيث}$$

$$(12.2)$$

نقول عن مصفوفتي A و B أنهما متشابهتان فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة Q تحقق العلاقة $B = Q^{-1} A Q$ وبذلك تكون قد برهننا النظرية :

VIII إذا كان $Y_z = AX_z$ تحويلا خطيا لـ $V_n(F)$ بالنسبة لأساس معين (الأساس Z) وإذا كان $Y_w = BX_w$ التحويل الخطي ذاته بالنسبة لأساس آخر (الأساس W) فإن A و B تكونان متشابهتين .

ملاحظة :

بما أن $Q = P^{-1}$ فإنه من الممكن كتابة (12.2) بالشكل $B = PAP^{-1}$. سنقدم فيما بعد دراسة للمصفوفات المتشابهة وسنفضل كتابة $B = R^{-1}AR$ على الكتابة $B = SAS^{-1}$ وذلك لمبررات غير إلزامية .

مثال ٢ :

$$Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X \quad \text{ليكن} \quad \text{تحويل خطي بالنسبة للأساس } E \quad \text{ولنفرض أن}$$

$W_1 = [1, 2, 1]'$ ، $W_2 = [1, -1, 2]'$ ، $W_3 = [1, -1, -1]'$ أساس جديد (١) أعطيت المتجه $[3, 0, 2]'$ $X =$ فأوجد احداثيات خياله بالنسبة للأساس W . (ب) أوجد التحويل الخطي $Y_w = BX_w$ المناظر للتحويل الخطي $Y = AX$. (ج) استخدم نتائج (ب) لإيجاد الخيال Y_w للمتجه $[1, 3, 3]'$ $X_w =$

$$W^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{اكتب} \quad W = [W_1, W_2, W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ثم استنتج}$$

(١) إن للمتجه $[3, 0, 2]'$ $X =$ بالنسبة للأساس W الاحداثيات : $X_w = W^{-1}X = [1, 1, 1]'$ وإن خيال $Y_w = W^{-1}Y = [14/3, 20/9, 19/9]'$ بالشكل W الذي يكتب بالنسبة للأساس W هو $Y = AX = [9, 5, 7]'$

$$Y_w = W^{-1}Y = W^{-1}AX = (W^{-1}AW)X_w = BX_w = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} X_w \quad (\text{ب})$$

$$Y_w = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = [6, 2, 7]' \quad (\text{ج})$$

أنظر المسألة ٥ .

مسائل محلولة

١ - (١) عين التحويل الخطي $Y = AX$ الذي يحول E_1 إلى $[1, 2, 3]'$ ، $Y_1 =$ ، E_2 إلى $[3, 1, 2]'$ و E_3 إلى $[2, 1, 3]'$ $Y_3 =$

(ب) أوجد أخيلة المتجهات $X_1 = [1, 1, 1]'$ ، $X_2 = [3, -1, 4]'$ و $X_3 = [4, 0, 5]'$.

(ج) برهن أن X_1 و X_2 مستقلان خطيا وأن خياليهما أيضاً مستقلان خطيا .

(د) برهن أن X_1 ، X_2 و X_3 مرتبطة خطياً وأن أخيلتها أيضاً مرتبطة خطياً .

(أ) من النظرية 1 يكون $A = [Y_1, Y_2, Y_3]$ وتكتب معادلة التحويل الخطي بالشكل $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$.

(ب) إن خيال $X_1 = [1, 1, 1]'$ هو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [6, 4, 8]'$ و $Y_1 = [8, 9, 19]'$ هو X_2 و $Y_2 = [3, 0, -2]'$ هو X_3

(ج) إن رتبة المصفوفة $[X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ تساوى 2 وكذلك رتبة المصفوفة $[Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$ تساوى 2

إذن المتجهان X_1 و X_2 مستقلان خطياً وكذلك يكون خيالهما مستقلين خطياً
(د) علينا أن نقارن بين رتبتي المصفوفتين $[X_1, X_2, X_3]$ و $[Y_1, Y_2, Y_3]$ وبما أن $X_3 = X_1 + X_2$ و $Y_3 = Y_1 + Y_2$ فإن كلا من المجموعتين مرتبطتين خطياً .

٢ - برهن أنه يكون التحويل الخطي (12.1) غير شاذ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A غير شاذة .
لنفرض أن A غير شاذة وأن تحويل $X_1 \neq X_2$ هما $Y = AX_1 = AX_2$ فيكون $Y = A(X_1 - X_2) = 0$ ويكون لمجموعة المعادلات المتجانسة $AX = 0$ حل غير تافه هو $X = X_1 - X_2$ وهكذا يمكن فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) $|A| = 0$. هذا يخالف لما فرضناه من أن A مصفوفة غير شاذة .

٣ - برهن أن تحويلاً خطياً غير شاذ يحول مجموعة متجهات مستقلة خطياً إلى مجموعة متجهات مستقلة خطياً .
لنفرض العكس هو أن الأخيلة $Y_i = AX_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, p)$ لمجموعة المتجهات المستقلة خطياً X_1, X_2, \dots, X_p هي مجموعة مرتبطة خطياً وهذا يعنى وجود مقادير عددية s_1, s_2, \dots, s_p ليست كلها أصفاراً بحيث يكون :

$$\sum_{i=1}^p s_i Y_i = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 + \dots + s_p Y_p = 0$$

أو

$$\sum_{i=1}^p s_i (AX_i) = A(s_1 X_1 + s_2 X_2 + \dots + s_p X_p) = 0$$

بما أن A غير شاذة فإن $s_1 X_1 + s_2 X_2 + \dots + s_p X_p = 0$. ولكن هذا مناقض لما فرضناه من كون X_i مستقلة خطياً وعلى ذلك فإن Y_i مستقلة خطياً

٤ - إذا علمت أن تحويلاً خطياً $Y = AX$ يحول المتجه $X_1 = [1, 0, 1]'$ إلى $[2, 3, -1]'$ والمتجه $X_2 = [1, 1, 1]'$ إلى $[3, 0, -2]'$ والمتجه $X_3 = [1, 2, -1]'$ إلى $[-2, 7, -1]'$ فأوجد أخيلة المتجهات E_1, E_2, E_3 واكتب معادلات هذا التحويل .

إذا فرضنا $aX_1 + bX_2 + cX_3 = E_1$ فإننا نجد $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$ ومنه $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$ أى أن

$E_1 = -\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{2}X_3$ وخياله هو $[1, 2, -2]'$ $E_2 = [3, 0, -2]'$ و $E_3 = [-2, 7, -1]'$ وبالمثل فإن خيال E_2 هو $Y_2 = [-1, 3, 1]'$ و خيال E_3 هو $Y_3 = [1, 1, 1]'$ وتكون معادلات التحويل الخطي المفروض هي :

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3]X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

٥ - إذا كان $Y_Z = AX_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X_Z$ تحويل خطياً بالنسبة للأساس Z المعرف في المسألة ١٢ من الفصل

١١ ، أوجد نفس التحويل $Y_W = BX_W$ بالنسبة للأساس W الوارد في المسألة المذكورة ذاتها .

$$X_W = PX_Z = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} X_Z \quad \text{نستنتج من المسألة ١٢ من الفصل ١١ أن}$$

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X_W = QX_W$$

$$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} X_W \quad \text{و}$$

مسائل إضافية

٦ - في المسألة ١ بين (١) أن التحويل الوارد فيها غير شاذ (ب) وأن التحويل $X=A^{-1}Y$ يحول متجهات أعمدة A إلى المتجهات الأولية .

٧ - مستخدماً التحويل الوارد في المسألة ١ أوجد (١) خيال $X=[1,1,2]$ (ب) المتجه X الذي خياله $[-2,-5,-5]$ الجواب (١) $[8,5,11]$ (ب) $[-3, -1,2]$

٨ - أدرس تأثير التحويل $Y = IX$ و $Y = KIX$

٩ - عين التحويل الخطي الذي يحول E_1 إلى $[1,2,3]$ و E_2 إلى $[3,1,2]$ و E_3 إلى $[2,-1,-1]$ ثم بين أن هذا التحويل شاذ ويحول المتجهين المستقلين خطياً $[1,1,1]$ و $[2,0,2]$ لمتجه واحد .

١٠ - افرض أن (12.1) غير شاذ ، وبين أنه إذا كانت المتجهات X_1, X_2, \dots, X_n مرتبطة خطياً فإن أخيلتها Y_1, Y_2, \dots, Y_n تكون كذلك مرتبطة خطياً .

١١ - استخدم النظرية III لتبرهن أنه من خلال تحويل خطي غير شاذ ، لا يتغير بعد فراغ إتجاهي .
إرشاد : اعتبر أخيلة أساس الفراغ $V_n^k(F)$

$$١٢ - \text{ باستخدام التحويل الخطي } Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X \text{ برهن (١) أن هذا التحويل شاذ}$$

(ب) إن أخيلة المتجهات المستقلة خطياً $X_1=[1,1,1]$ و $X_2=[2,1,2]$ و $X_3=[1,2,3]$ هي متجهات مرتبطة خطياً
(ج) إن خيال $V_3(R)$ هو $V_3^2(R)$

١٣ - باستخدام التحويل الخطي $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$ بين أن (أ) إن هذا التحويل شاذ . (ب) إن خيال كل متجه

من $V_3^2(R)$ المولد بالمتجهين $[1,1,1]^T$ و $[3,2,0]^T$ ينتمي إلى الفراغ $V_3^1(R)$ المولد بـ $[5,7,5]^T$

١٤ - برهن النظرية : VII

إرشاد : لتكن X_i ، Y_i حيث $(i=1,2,...,n)$ مجموعتي المتجهات المفروضتين وليكن $Z = AX$ التحويل الخطي الذي يحول المجموعة X_i إلى المجموعة E_i و $Y = BZ$ الذي يحول E_i إلى Y_i
١٥ - برهن أن المصفوفات المتشابهة تكون محدداً متساوية .

١٦ - ليكن $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ تحويل خطياً بالنسبة للأساس E وبفرض اختيار الأساس الجديد

$Z_1 = [1,1,0]^T$ ، $Z_2 = [1,0,1]^T$ ، $Z_3 = [1,1,1]^T$ لنفرض المتجه $X = [1, 2, 3]^T$ منسوباً للأساس E بين أن :

(أ) إن $Y = [14, 10, 6]^T$ خيال X من خلال هذا التحويل .

(ب) وإنه إذا نسبنا إلى الأساس الجديد فإن إحداثيات X تكون $X_Z = [-2, -1, 4]^T$ وتكون إحداثيات Y هي

$$Y_Z = [8, 4, 2]^T$$

(ج) وإن $X_Z = PY$ و $Y_Z = PY$ حيث $P = [Z_1, Z_2, Z_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(د) وإن $Y_Z = Q^{-1}AQX_Z$ حيث $Q = P^{-1}$.

١٧ - ليكن التحويل الخطي $Y_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_W$ منسوباً للأساس $W_1 = [0, -1, 2]^T$ ، $W_2 = [4, 1, 0]^T$

$W_3 = [-2, 0, -4]^T$ اكتب تمثيلاً منسوباً للأساس Z حيث

الحساب : $Z_1 = [1, -1, 1]^T$ ، $Z_2 = [1, 0, -1]^T$ ، $Z_3 = [1, 2, 1]^T$.

١٨ - إذا كانت في تحويل خطي $Y = AX$ المصفوفة A شاذة ، فإن الفراغ المنعدم للمصفوفة A هو فراغ

إتجاهي يتحول كل متجه منه وفوق هذا التحويل إلى المتجه الصفري . عين الفراغ الصفري (المنعدم) للتحويلات :

(أ) الوارد في المسألة ١٢ (ب) الوارد في المسألة ١٣ (ج) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X$

الجواب : (أ) $V_3^1(R)$ المولد ب $[1, -1, 1]$

(ب) $V_3^1(R)$ المولد ب $[2, 1, -1]$

(ج) $V_3^2(R)$ المولد ب : $[2, -1, 0]^*$ و $[3, 0, -1]^*$

١٩ - إذا حول $Y=AX$ كل متجه من الفراغ الإتجاهي V_n^h إلى متجه من هذا الفراغ ذاته ، فإننا نقول عن الفراغ V_n^h إنه فراغ لا متغير للتحويل . بين أنه في الفراغ الحقيقي $V_3(R)$ بتطبيق التحويل الخطي .

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (أ)$$

الفراغ V_3^1 المولد ب $[1, -1, 0]$ والفراغ V_3^1 المولد ب $[2, -1, -2]$ و V_3^1 المولد ب

$[1, -1, -2]^*$ هي فراغات إتجاهية لا متغيرة .

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X. \quad (ب)$$

الفراغ V_3^1 والمولد ب $[1, 1, 1]$ والفراغ V_3^2 المولد بالمتجهين $[1, 0, -1]^*$

و $[2, -1, 0]^*$ هما فراغان لا متغيران للتحويل المفروض . (لاحظ أن خيال كل متجه من V_3^2 هو هذا المتجه نفسه) .

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} X. \quad (ج)$$

الفراغ V_4^1 المولد ب $[1, 1, 1, 1]$ هو فراغ لا متغير للتحويل المفروض .

٢٠ - اعتبر التحويل الخطي $Y = P X$: $y_i = x_{ji}$ حيث $(i=1, 2, \dots, n)$ وفيه j_1, j_2, \dots, j_n تبديل لـ $1, 2, \dots, n$

(أ) صف مصفوفة التبديل P

(ب) برهن أنه يوجد ! n مصفوفة تبديل من الدرجة n

(ج) برهن أنه إذا كان كل من P_1 و P_2 مصفوفتي تبديل فإن $P_3 = P_1 P_2$ و $P_4 = P_2 P_1$ هما مصفوفتا تبديل أيضاً .

(د) برهن أنه إذا كانت P مصفوفة تبديل فإن P^* مصفوفة تبديل و $PP^* = I$

(هـ) برهن أنه يمكن التعبير عن كل مصفوفة تبديل P كحاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية $K_{12}, K_{23}, \dots, K_{n-1, n}$

(و) اكتب $P = [E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}]$ حيث i_1, i_2, \dots, i_n تبديل لـ $1, 2, \dots, n$ وحيث E_{i_j} المتجهات الأولية

ذات الـ n مركبة (أو حد قعدة) غير القاعدة $P^{-1} = P^*$ لكتابة P^{-1} . مثال ذلك ، عندما يكون $n=4$

$$P = [E_3, E_1, E_4, E_2], \text{ فـ } P^{-1} = [E_2, E_4, E_1, E_3] \text{ وإذا كان } P = [E_4, E_2, E_1, E_3], \text{ فـ } P^{-1} = [E_3, E_2, E_4, E_1]$$

الفصل الثالث عشر

المتجهات على الحقل الحقيقي

حاصل الضرب الداخلي :

في هذا الفصل نعتبر كل متجه متجهاً حقيقياً كما نعتبر $V_n(R)$ الفراغ الإتجاهي لكل المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة . إذا كان $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$, $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$ متجهين من $V_n(R)$ فإننا نعرف حاصل ضربهما الداخلي بأنه العدد

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (13.1)$$

مثال ١ :

للمتجهات $X_1 = [1, 1, 1]'$, $X_2 = [2, 1, 2]'$, $X_3 = [1, -2, 1]'$ يكون

$$X_1 \cdot X_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 \quad (أ)$$

$$X_1 \cdot X_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 0 \quad (ب)$$

$$X_1 \cdot X_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \quad (ج)$$

$$X_1 \cdot 2X_2 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10 = 2(X_1 \cdot X_2) \quad (د)$$

ملاحظة :

يعرف حاصل الضرب الداخلي في أغلب الأحيان بالشكل

$$X \cdot Y = X'Y = Y'X \quad (13.1')$$

إن إستعمال الرمز $X'Y$ و $Y'X$ مفيد ولكن $X'X$ و $Y'Y$ مصفوفتان من الدرجة 1×1 بينما $X \cdot Y$ هو عنصر المصفوفة . سنستخدم (13.1') في هذا الفصل وفقاً لهذا المفهوم . يستعمل مؤلفون آخرون الرمز $X|Y$ بدلا من $X \cdot Y$ في تحليل المتجهات يسمى حاصل الضرب الداخلي الضرب القياسي .

إن قواعد حاصل الضرب الداخلي بادية الوضوح

$$X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1, \quad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2) \quad (أ)$$

$$X_1 \cdot (X_2 + X_3) = (X_2 + X_3) \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 \quad (ب) \quad (13.2)$$

$$(X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) = X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4 \quad (ج)$$

المتجهات المتعامدة :

نقول عن متجهين X و Y من $V_n(R)$ إنهما متعامدان فيما إذا كان حاصل ضربهما الداخلي مساويا للصفر . إن المتجهين X_1 و X_3 من المثال ١ متعامدان .

طول المتجه : X من $V_n(R)$ الممثل بـ $\|X\|$ يعرف بالجزء التربيعي لحاصل الضرب الداخلي للمتجه X بالمتجه X أي :

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (13.3)$$

مثال ٢ :

ينتج من (ج) من المثال ١ أن $\|X_1\| = \sqrt{3}$

أنظر المسألتين ١ - ٢

باستخدام (13.1) و (13.1) فن الممكن برهان :

$$X \cdot Y = \frac{1}{2} \{ \|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2 \} \quad (13.4)$$

يدعى المتجه X الذى طوله $\|X\| = 1$ متجه الوحدة إن المتجهات الأولية E_i أمثلة من متجهات الوحدة .

متباينة شوارز : إذا كان X و Y متجهين من $V_n(R)$ فإنهما يحققان :

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad (13.5)$$

أى أن القيمة العددية لحاصل الضرب الداخلى لمتجهين حقيقيين لا تزيد عن حاصل ضرب طولى هذين المتجهين .

أنظر المسألة ٣

المتباينة الثلاثية :

إذا كان X و Y متجهين من الفراغ $V_n(R)$ فإن :

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad (13.6)$$

المتجهات والفراغات المتعامدة :

إذا كان X_1, X_2, \dots, X_m متجهها حيث $n \geq m$ غير صفيرية متعامدة كل منها على الأخرى وإذا كان $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m = 0$ فإنه لقيم $c_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$. نتحقق العلاقة $(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_m X_m) \cdot X_i = 0$ وحيث أن ذلك يتطلب أن $C_i = 0$ لقيم $i = 1, 2, \dots, m$ فإنه يكون :

I إن أى مجموعة مكونة من m حيث $n \geq m$ متجهها ذا n مركبة لايساوى أى واحد منها الصفر ومتعامدة مثنى ،

هى مجموعة مستقلة خطياً وتولد فراغاً إتجاهياً $V_n^m(R)$. نقول عن متجه Y أنه متعامد مع فراغ إتجاهى $V_n^m(R)$ فيما إذا كان متعامداً مع كل متجه من هذا الفراغ .

II إذا كان متجه Y متعامداً مع كل متجه من المتجهات ذات الـ n مركبة X_1, X_2, \dots, X_m فإنه يكون متعامداً مع الفراغ

الإتجاهى المولد بهذه المتجهات .

أنظر المسألة ٤

III إذا كان $V_n^h(R)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(R)$ حيث $k > h$ فإنه يوجد على الأقل ، متجه واحد V من $V_n^k(R)$ متعامد

مع $V_n^h(R)$.

أنظر المسألة ٥

بما أن المتجهات المتعامدة مثنى هى متجهات مستقلة خطياً . فإن فراغاً إتجاهياً $V_n^m(R)$ حيث $0 < m$ لا يمكن أن يحوى أكثر

من m من المتجهات المتعامدة مثنى . لنفرض أننا وجدنا r حيث $m > r$ متجهها متعامدة مثنى من الفراغ $V_n^m(R)$. إن

هذه المتجهات تولد فراغاً جزئياً $V_n^r(R)$ من $V_n^m(R)$ ووفقاً إلى النظرية III فإنه يوجد على الأقل متجه واحد من

$V_n^m(R)$ متعامد مع الفراغ $V_n^r(R)$. فنكون قد حصلنا الآن على $(r + 1)$ متجهها متعامدة مثنى من $V_n^m(R)$ وإذا كررنا

هذه الحجة فإننا نكون قد برهنا :

IV يحوى كل فراغ إتجاهى $V_n^m(R)$ حيث $0 < m$ على m ، وليس أكثر من ذلك ، من المتجهات المتعامدة مثنى .

نقول عن فراغين إتجاهيين إنهما متعامدان ، فيما إذا كان كل متجه من أحدهما متعامد مع كل متجه من الآخر ، . مثال ذلك

إن الفراغ المولد بالمتجهين $X_1 = [1, 0, 0, 1]$ و $X_2 = [0, 1, 1, 0]$ متعامد مع الفراغ المولد بالمتجهين $X_3 = [1, 0, 0, -1]$ و

$X_4 = [0, 1, -1, 0]$ وذلك لأن $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$ لكل قيم a, b, c, d .

V إن مجموعة كل المتجهات المتعامدة مع كل متجه من الفراغ $V_n^k(R)$ تؤلف فراغاً إتجاهياً وحيداً $V_n^{n-k}(R)$.

أنظر المسألة ٦

يمكننا أن نزامن أى متجه $X \neq 0$ بمتجه فريد (وحيد) U نحصل عليه بقسمة مركبات X على $\|X\|$. تسمى هذه العملية التعمير . أى لكي نجعل متجهها عيارياً مثل $X = [2, 4, 4]$ نقسم كل مركبة من مركباته على $\|X\| = \sqrt{4+16+16} = 6$ فنجد متجه الوحدة $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$.

يسمى أساس الفراغ الاتجاهى $V_n^m(R)$ المكون من متجهات متعامدة متنى . أساس متعامد لهذا الفراغ . وإذا كانت متجهات الأساس المتعامدة متجهات وحدة فإن هذا الأساس يدعى الأساس العيارى المتعامد . إن المتجهات الأولية أسس متعامدة عيارية للفراغ . أنظر المسألة ٧

طريقة جرام — تسميت للتعامد : لنفرض أن X_1, X_2, \dots, X_m أساس لـ $V_n^m(R)$. عرف

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Y_m = X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \dots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

وهكذا تكون متجهات الوحدة $G_i = \frac{Y_i}{\|Y_i\|}$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m)$ متعامدة متنى وتكون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n^m(R)$.

مثال ٣ : كون ، مستخدماً طريقة جرام - تسميت ، أساساً متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت الأساس

$$X_1 = [1, 1, 1]', X_2 = [1, -2, 1]', X_3 = [1, 2, 3]'$$

$$Y_1 = X_1 = [1, 1, 1]' \quad (i)$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, -2, 1]' - \frac{0}{3} Y_1 = [1, -2, 1]' \quad (ii)$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, 2, 3]' - \frac{0}{6} Y_2 - \frac{6}{3} [1, 1, 1]' = [-1, 0, 1]' \quad (iii)$$

$$G_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]' \quad \text{إن المتجهات}$$

$$G_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]' \quad \text{و} \quad G_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = [1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$$

تكون أساساً متعامداً عيارياً لـ $V_3(R)$. كل متجه G_i منها هو وحدة وكل حاصل ضرب $G_i \cdot G_j = 0$

لاحظ في هذه الحالة أن $Y_2 = X_2$ لأن X_1 و X_2 هما متجهان متعامدان .

أنظر المسألين ٨ - ٩

لنفرض أن X_1, X_2, \dots, X_m أساس للفراغ $V_n^m(R)$ ولنفرض أن المتجهات X_1, X_2, \dots, X_s حيث $(m > s \geq 1)$ متعامدة متنى . إذن يمكننا ، باستخدام طريقة جرام - تسميت ، إيجاد أساس متعامد Y_1, Y_2, \dots, Y_m هذا الفراغ ومن السهل أن نبرهن أن $Y_i = X_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, s)$ ، وهكذا نجد .

٧ . إذا كانت المتجهات X_1, X_2, \dots, X_s حيث $(m > s \geq 1)$ متجهات وحدة متعامدة متنى من $V_n^m(R)$ فإنه يوجد متجهات وحدة $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_m$ من هذا الفراغ بحيث تصبح المجموعة X_1, X_2, \dots, X_m أساساً متعامداً عيارياً

مصفوفة جرام (الجراميان) : لنفرض أن X_1, X_2, \dots, X_p مجموعة من المتجهات الحقيقية ذات البعد n ونعرف مصفوفة جرام بالشكل :

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \dots & X_2 \cdot X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \dots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' X_1 & X_1' X_2 & \dots & X_1' X_p \\ X_2' X_1 & X_2' X_2 & \dots & X_2' X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p' X_1 & X_p' X_2 & \dots & X_p' X_p \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

من الواضح أن هذه المتجهات تكون متعامدة متى فيها إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة G قطرية .
في المسألة ١٤ من الفصل ١٧ سنبرهن :

VII. لمجموعة المتجهات الحقيقية ذات البعد n مركبة X_1, X_2, \dots, X_p يكون $|G| \geq 0$. وتكون المساواة صحيحة فيما إذا كانت (وإذا فقط) هذه المتجهات مرتبطة خطياً .

المصفوفات المتعامدة : نقول عن مصفوفة A إنها متعامدة فيما إذا كان :

$$AA' = A'A = I \quad (13.9)$$

أي إذا كان

$$A' = A^{-1} \quad (13.9')$$

يتضح من العلاقة (13.9) أن متجه أعمدة (صفوف) مصفوفة متعامدة A هي متجهات وحدة متعامدة متى .

مثال ٤ : ينتج عن المثال ٣ أن المصفوفة A متعامدة

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ينتج عما سبق مباشرة مايلي :

VIII. إذا كانت المصفوفة A المربعة ، الحقيقية ذات الدرجة pp . متعامدة فإن أعمدتها (صفوفها) تكون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n(R)$ والعكس صحيح .

IX. إن معكوس ومنقول مصفوفة متعامدة هما مصفوفتان متعامدتان .

X. إن حاصل ضرب مصفوفتين متعامدتين أو أكثر ، هو مصفوفة متعامدة .

XI. يساوي محددة مصفوفة متعامدة ± 1

التحويلات المتعامدة ليكن

$$Y = AX \quad (13.10)$$

تحويلاً خطياً معرّفاً على $V_n(R)$ ولنرمز لخالي المتجهين X و X_2 من هذا الفراغ بالرمزين Y_1 و Y_2 على الترتيب نستنتج من العلاقة (13.4) أن

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{2} \{ \|X_1 + X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2 \}$$

$$Y_1 \cdot Y_2 = \frac{1}{2} \{ \|Y_1 + Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2 \}$$

إذا قارنا بين الأطراف اليمنى والأطراف اليسرى ، فإننا نرى أنه إذا كانت العلاقة (١٣-١٠) تحافظ على الأطوال فإنها تحافظ على حاصل الضرب الداخلي والعكس بالعكس . أي :

XII. يحافظ التحويل الخطي على الأطوال فيما إذا كان (وإذا كان فقط) محافظاً على حاصل الضرب الداخلي .

نقول عن تحويل خطي $Y = AX$ إنه متعامد فيما إذا كانت مصفوفته A متعامدة . سنبرهن في المسألة ١٠ :

XIII. يحافظ تحويل خطي على الأطوال فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته متعامدة .

مثال هـ : إن التحويل الخطي $Y = AX$ متعامد وإن جبال $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ هو :

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$Y = \left[\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \right]'$$

ولكل من هذين المتجهين طول واحد يساوى $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

XIV. وإذا كان (13.10) تحويلًا للاحداثيات من الأساس E إلى الأساس Z فإن الأساس Z يكون عيارياً متعامداً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A متعامدة.

مسائل محلولة

١ - إذا كان $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ أوجد :
(أ) حاصل ضربهما الداخلي (ب) طول كل منهما.

$$X_1 \cdot X_2 = X_1' X_2 = [1, 2, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-3) + 3(4) = 8 \quad (أ)$$

$$\|X_1\|^2 = X_1 \cdot X_1 = X_1' X_1 = [1, 2, 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14 \quad \text{and} \quad \|X_1\| = \sqrt{14} \quad (ب)$$

٢ - (أ) برهن أن المتجهين $X = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ متعامدان.
(ب) أوجد متجهها Z متعامداً مع كل من X و Y .

$$X \cdot Y = X' Y = [1/3, -2/3, -2/3] \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0 \quad (أ)$$

$$[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \text{ لنكتب } [X, Y, 0] \text{ , ونحسب المعاملات المرافقة } 1/3, -2/3, -2/3 \text{ لعناصر العمود الصفري .}$$

من (3.11) نجد أن $Z = [-2/3, -2/3, 1/3]'$ متعامد مع كل من X و Y .

٣ - برهن متباينة شوارز . إذا كان X و Y متجهين من $V_n(R)$ فإن $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.
من الواضح، أن هذه النظرية صحيحة إذا كان X أو Y المتجه الصفري . لنفرض أن المتجهين X و Y ليسا متجهات صفرية . إذا كان a أى عدد حقيقى فإن :

$$\begin{aligned} \|aX + Y\|^2 &= (aX + Y) \cdot (aX + Y) \\ &= [ax_1 + y_1, ax_2 + y_2, \dots, ax_n + y_n] \cdot [ax_1 + y_1, ax_2 + y_2, \dots, ax_n + y_n]' \\ &= (a^2 x_1^2 + 2ax_1 y_1 + y_1^2) + (a^2 x_2^2 + 2ax_2 y_2 + y_2^2) + \dots + (a^2 x_n^2 + 2ax_n y_n + y_n^2) \\ &= a^2 \|X\|^2 + 2aX \cdot Y + \|Y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ولكن من المعلوم أن كثيرة حدود من الدرجة الثانية بالنسبة في a يكون أكبر أو يساوى الصفر لكل قيمة حقيقية لـ a .
فيما إذا كان (وإذا كان فقط) مميزه أصغر أو يساوى الصفر أى :

$$4(X \cdot Y)^2 - 4\|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 \leq 0$$

ومنه نجد

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

٤ - برهن أنه إذا كان المتجه Y متعامداً مع كل من المتجهات X_1, X_2, \dots, X_m ذات الـ n مركبة ، فإنه يكون متعامداً مع الفراغ المولد بهذه المتجهات . يمكن كتابة أى متجه في الفراغ المولد بالمتجهات المفروضة بالشكل $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m$ ويكون :

$$(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m) \cdot Y = a_1 X_1 \cdot Y + a_2 X_2 \cdot Y + \dots + a_m X_m \cdot Y = 0$$

وبما أن $X_i \cdot Y = 0$. ($i = 1, 2, \dots, m$) فإن Y يكون متعامداً مع كل متجه من الفراغ المولد بالمتجهات ويكون ، بالتعريف ، متعامداً مع هذا الفراغ . وعلى وجه الخصوص إذا كان Y متعامداً مع كل متجه من أساس فراغ إتجاهي فإنه يكون متعامداً مع هذا الفراغ .

٥ - برهن أنه إذا كان $V_n^h(R)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(R)$ حيث $h < k$ فإنه يوجد على الأقل ، متجه واحد X من $V_n^h(R)$ متعامد مع $V_n^k(R)$

لتكن X_1, X_2, \dots, X_h أساساً لـ $V_n^h(R)$ ولتكن X_{h+1} متجهاً من $V_n^k(R)$ غير واقع في $V_n^h(R)$ واعتبر المتجه :

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_h X_h + a_{h+1} X_{h+1} \quad (i)$$

إن شرط تعامد المتجه X مع كل من X_1, X_2, \dots, X_h يتكون من h معادلة خطية متجانسة .

$$a_1 X_1 \cdot X_1 + a_2 X_2 \cdot X_1 + \dots + a_h X_h \cdot X_1 + a_{h+1} X_{h+1} \cdot X_1 = 0$$

$$a_1 X_1 \cdot X_2 + a_2 X_2 \cdot X_2 + \dots + a_h X_h \cdot X_2 + a_{h+1} X_{h+1} \cdot X_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_1 X_1 \cdot X_h + a_2 X_2 \cdot X_h + \dots + a_h X_h \cdot X_h + a_{h+1} X_{h+1} \cdot X_h = 0$$

ذات الـ $(h+1)$ مجهولاً a_1, a_2, \dots, a_{h+1} من النظرية IV من الفصل العاشر ، يكون لهذه المجموعة حل غير تافه . عندما نعوض هذه القيم في (i) فإننا نحصل على متجه X غير صفري (لماذا ؟) متعامد مع أساس الفراغ الإتجاهي $V_n^h(R)$ أى متعامد مع هذا الفراغ .

٦ - برهن أن مجموع كل المتجهات المتعامدة مع كل متجه من فراغ معين $V_n^k(R)$ يكون فراغاً إتجاهياً وحيداً $V_n^{n-k}(R)$ لتكن X_1, X_2, \dots, X_k أساساً للفراغ الإتجاهي $V_n^k(R)$. إن المتجه X ذا الـ n مركبة المتعامد مع كل X_i يحقق مجموعة المعادلات المتجانسة .

$$X_1 \cdot X = 0, X_2 \cdot X = 0, \dots, X_k \cdot X = 0 \quad (i)$$

بما أن X_i هي مجموعة مستقلة خطياً فإن رتبة مصفوفة معاملات مجموعة المعادلات (i) تساوي k ، وينتج عن ذلك أنه يوجد ($n - k$) حلاً (متجهاً) مستقلة خطياً تولد الفراغ $V_n^{n-k}(R)$ (أنظر النظرية VI الفصل ١٠) .

بما أن تقاطع الفراغين $V_n^k(R)$ و $V_n^{n-k}(R)$ يساوى الفراغ الصفري وأن مجموع هذين الفراغين يساوى $V_n(R)$ فإن الفراغ الموجود وحيد .

٧ - أوجد أساس عيارية متعامدة للفراغ $V_3(R)$ إذا أعطيت : $X = [1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$.

من الملاحظ أن X متجه وحدة . بإختيار $Y = [1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]'$ متجه وحدة آخر بحيث يكون $X \cdot Y = 0$. وكما في (١) من المسألة ٢ نجد $Z = [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$ الذى يتم المجموعة المطلوبة .

٨ - استنتج معادلات حزام - شبيت (13.7)

لتكن X_1, X_2, \dots, X_m أساساً للفراغ $V_n^m(R)$ ولنرمز بالرموز Y_1, Y_2, \dots, Y_m مجموعة المتجهات المتعامدة متى التى يراد إيجادها .

$$(أ) \text{ لنأخذ } Y_1 = X_1$$

(ب) لنأخذ : $Y_2 = X_2 + aY_1$ وبما أنه يلزم أن يكون Y_1 و Y_2 متعامدين متى أى :

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot aY_1 = Y_1 \cdot X_2 + aY_1 \cdot Y_1 = 0$$

$$\text{ومنـه } a = -\frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} \text{ أى } Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

(ج) لنأخذ : $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$ وبما أن المتجهات الثلاث Y_1, Y_2, Y_3 يجب أن تكون متعامدة كل منها على الأخرى (متى) فإنه يلزم أن يكون :

$$Y_1 \cdot Y_3 = Y_1 \cdot X_3 + aY_1 \cdot Y_2 + bY_1 \cdot Y_1 = Y_1 \cdot X_3 + bY_1 \cdot Y_1 = 0$$

$$Y_2 \cdot Y_3 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 + bY_2 \cdot Y_1 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 = 0$$

$$\text{ومنـه } b = -\frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1}, \quad a = -\frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2}, \quad Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

(د) استمر فى هذه العملية حتى تحصل على Y_m .

٩ - أوجد أساس متعامدة عيارية لـ V_3 فيما إذا أعطيت الأساس $X_1 = [2, 1, 3]^T, X_2 = [1, 2, 3]^T, X_3 = [1, 1, 1]^T$.

لنأخذ : $Y_1 = X_1 = [2, 1, 3]^T$ فنجد :

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, 2, 3]^T - \frac{13}{14} [2, 1, 3]^T = [-6/7, 15/14, 3/14]^T$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1, 1, 1]^T - \frac{2}{9} \left[-\frac{6}{7}, \frac{15}{14}, \frac{3}{14} \right]^T - \frac{3}{7} [2, 1, 3]^T = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right]^T$$

اجعل المتجهات Y عيارية فنحصل على $[2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}]^T, [-4/\sqrt{42}, 5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}]^T$

$[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]^T$ كأساس عيارى متعامد المطلوب .

١٠ - برهن أن تحويلاً خطياً يحافظ على الأطوال فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته متعامدة .

ليكن Y_1 و Y_2 خيالى X_1 و X_2 على الترتيب وفق التحويل الخطى $Y = AX$

فلنفرض أن A متعامدة أى $A^T A = I$ فيكون عندها :

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1^T Y_2 = (X_1^T A^T)(AX_2) = X_1^T X_2 = X_1 \cdot X_2 \quad (i)$$

ومن النظرية XII نجد أن الأطوال محفوظة

على العكس ، لنفرض أن الأطوال محفوظة (وكذلك حاصل الضرب الداخلي) فيكون :

$$Y_1 \cdot Y_2 = X_1'(AA)X_2 = X_1'X_2, \quad AA = I$$

أي أن A مصفوفة متعامدة .

مسائل إضافية

١١ - إذا أعطيت المتجهات $X_1 = [1, 2, 1]'$, $X_2 = [2, 1, 2]'$, $X_3 = [2, 1, -4]'$ فأوجد :

(أ) حاصل الضرب الداخلي لكل زوج منها .

(ب) طول كل واحد منها .

(ج) متجهها متعامداً مع زوج المتجهات X_1 و X_2 وآخر مع زوج المتجهات X_1 و X_3

الحساب (أ) $-3, 0, 6$ (ب) $\sqrt{6}, 3, \sqrt{21}$ (ج) $[3, -2, 1]'$, $[1, 0, -1]'$

١٢ - استعمل متجهات اختيارية من $V_3(R)$ و حقق العلاقات (13.2)

١٣ - برهن المساواة (13.4)

١٤ - لنفرض أن المتجهين $X = [1, 2, 3, 4]'$ و $Y = [2, 1, -1, 1]'$ أساساً للفراغ $V_4^2(R)$ وأن $Z = [4, 2, 3, 1]'$

واقع في فراغ $V_4^3(R)$ يحوى X و Y

(أ) برهن أن Z غير متم إلى $V_4^2(R)$.

(ب) اكتب $W = aX + bY + cZ$ وأوجد متجهها W من $V_4^3(R)$ متعامداً مع كل من X و Y .

١٥ - (أ) برهن أن متجهها من $V_n(R)$ يكون متعامداً مع نفسه فيما إذا كان (إذا كان فقط) . المتجه الصفري .

(ب) برهن أنه إذا كانت X_1, X_2, X_3 مجموعة من المتجهات المرتبطة خطياً وغير صفرية وذات n مركبة وإذا

كان $X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_3 = 0$ فإن المتجهين X_2 و X_3 يكونان مرتبطين خطياً .

١٦ - برهن أن متجهها X يكون متعامداً مع كل متجه من $V_n^m(R)$ إذا كان (وإذا كان فقط) متعامداً مع كل متجه من أساس هذا الفراغ .

١٧ - برهن أنه إذا كان الفراغان الإتجاهيان $V_n^h(R)$ و $V_n^k(R)$ متعامدين فإن فراغ تقاطعهما هو $V_n^0(R)$.

١٨ - برهن المتباينة المثلثية .

إرشاد : برهن أن $\|X + Y\|^2 \leq (\|X\| + \|Y\|)^2$ مستخدماً من متباينة شوارز .

١٩ - برهن أن $\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\|$ إذا كان (وإذا كان فقط) X و Y مرتبطين خطياً .

٢٠ - اجعل المتجهات الواردة في المسألة ١١ عيارية .

الحساب : $[1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$, $[2/3, 1/3, 2/3]'$, $[2/\sqrt{21}, 1/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21}]'$

٢١ - برهن أن المتجهات X و Y و Z الواردة في المسألة ٢ تؤلف أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$.

٢٢ - (أ) برهن أنه إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_m مستقلة خطياً فإن متجهات الوحدة التي تنتج عن جعل هذه المتجهات عيارية تكون مستقلة خطياً .

(ب) برهن أنه إذا كانت المتجهات الواردة في (أ) غير صفرية ومتعامدة كل منها على الأخرى فإن نفس الحال

تكون بالنسبة لمتجهات الوحدة التي نحصل عليها بجعلها عيارية .

- ٢٣ - برهن : (أ) إذا كانت A متعامدة و $|A| = I$ فإن كل عنصر من A يساوى معاملة المرافق في $|A|$.
 (ب) إذا كانت A متعامدة و $|A| = -I$ فإن كل عنصر من A يساوى سالب المعاملة المرافق في $|A|$.

٢٤ - برهن النظريات VIII ، XI ، X ، XI

٢٥ - برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين وكانت C متعامدة ، فإن $C'AC$ و $C'BC$ تبديليتان .

٢٦ - برهن أن AA' (أو AA') حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، تكون مصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت) صفوف (أو أعمدة) A متعامدة .

٢٧ - برهن أنه إذا كان X و Y متجهين من n مركبة فإن المصفوفة $XY' + YX'$ تكون متماثلة .

٢٨ - برهن أنه إذا كان X و Y متجهين من n مركبة وكانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $X(A'Y) = (A'X)Y$

٢٩ - برهن أنه إذا كانت المجموعة X_1, X_2, \dots, X_n أساساً عيارياً متعامداً وإذا كان $X = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ،

فإن :

$$X \cdot X = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \quad (ب) \quad X \cdot X_i = c_i, (i = 1, 2, \dots, n); \quad (أ)$$

٣٠ - أوجد أساساً عيارياً متعامداً للفراغ $V_3(R)$ فيما إذا أعطيت (أ) $X_1 = [3/\sqrt{17}, -2/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17}]$

(ب) $[3, 0, 2]$

الجواب (أ)

$$X_1, [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]', [-4/\sqrt{34}, -3/\sqrt{34}, 3/\sqrt{34}]'$$

(ب)

$$[3/\sqrt{13}, 0, 2/\sqrt{13}]', [2/\sqrt{13}, 0, -3/\sqrt{13}]', [0, 1, 0]'$$

٣١ - كون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$ بطريقة جرام - شميت مستخدماً مجموعة المتجهات المرتبة التالية :

(أ)

$$[1, -1, 0]', [2, -1, -2]', [1, -1, -2]'$$

(ب)

$$[1, 0, 1]', [1, 3, 1]', [3, 2, 1]'$$

(ج)

$$[2, -1, 0]', [4, -1, 0]', [4, 0, -1]'$$

الجواب : (أ)

$$[\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0]', [\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3]', [-2/3, -2/3, -1/3]'$$

(ب)

$$[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]', [0, 1, 0]', [\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]'$$

(ج)

$$[2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5, 0]', [\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5, 0]', [0, 0, -1]'$$

٣٢ - أوجد أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت $X_1 = [1, 1, -1]'$ و $X_2 = [2, 1, 0]'$ إرشاد : خذ $Y_1 = X_1$ واحصل على Y_2 بطريقة جرام - شмит ثم على Y_3 بالطريقة الواردة في (ب) من المسألة ٢ الجواب :

$$[\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3]', [\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]', [\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6]'$$

٣٣ - أوجد أساس عيارى متعامد لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت $X_1 = [7, -1, -1]'$.

٣٤ - برهن بطريقتين مختلفتين على أن المتجهات $[1, -1, -2, -3]'$, $[1, 2, 3, 4]'$ و $[5, 4, 5, 6]'$ مرتبطة خطياً.

٣٥ - برهن أنه إذا كانت A متماثلة تخالفية وكانت $I+A$ غير شاذة فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ متعامدة.

٣٦ - استخدم المسألة ٣٥ لتحصل على مصفوفة متعامدة B إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} \quad (١) \quad \text{الجواب :}$$

٣٧ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة وإذا كان $B=AP$ ، حيث P مصفوفة غير شاذة فإن BP^{-1} متعامدة.

٣٨ - في تحويل للأحداثيات من الأساس E إلى أساس عيارى متعامد Z إذا فرضنا P مصفوفة هذا التحويل فإن $Y=AX$

يصبح $Y_1 = P^{-1}APX_1$ أو $Y_1 = BX_1$ (أنظر في الفصل ١٢). برهن أنه إذا كانت A متعامدة فإن B تكون متعامدة أيضاً والعكس بالعكس وهذا ما يبرهن النظرية XIV.

٣٩ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة وكانت $I+A$ غير شاذة فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ متماثلة تخالفية.

٤٠ - ليكن $X = [x_1, x_2, x_3]'$ و $Y = [y_1, y_2, y_3]'$ متجهين من $V_3(R)$ ولنعرف حاصل الضرب الاتجاهى $X \times Y$

$$Z = X \times Y = [z_1, z_2, z_3]'$$
 حيث $z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

بعد مطابقة z_i بالمعاملات المرافقة لعناصر العمود الثالث من $[X, Y, 0]$ حقق :

(١) حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين مرتبطين خطياً هو متجه صفري.

(ب) حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين مستقلين خطياً متعامداً مع كل من المتجهين.

$$X \times Y = -(Y \times X) \quad (ج)$$

$$(kX) \times Y = k(X \times Y) = X \times (kY), \quad \text{حيث } k \text{ مقدار عددي.} \quad (د)$$

٤١ - إذا كان Z, Y, X, W أربعة متجهات من $V_3(R)$ فبرهن :

$$X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z \quad (١)$$

(ب)

$$X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X) = Z \cdot (X \times Y) = |XYZ|$$

$$(W \times X) \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} W \cdot Y & W \cdot Z \\ X \cdot Y & X \cdot Z \end{vmatrix} \quad (ج)$$

$$(X \times Y) \cdot (X \times Y) = \begin{vmatrix} X \cdot X & X \cdot Y \\ Y \cdot X & Y \cdot Y \end{vmatrix} \quad (د)$$

الفصل الرابع عشر

المتجهات على حقل الأعداد المركبة

الأعداد المركبة :

إذا كان x و y عددين حقيقيين وكان معرفاً بالعلاقة (١) $i^2 = -1$ فإن $z = x + iy$ يدعى عدداً مركباً . يسمى العدد الحقيقي x الجزء الحقيقي ويسمى العدد الحقيقي y الجزء التخيلي للعدد $x + iy$.

يكون عددين مركبين متساويين فيما إذا كان الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل منهما يساوى على الترتيب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للآخر .

يكون العدد المركب $x + iy = 0$ فيما إذا كان $(x = y = 0)$ (وإذا كان فقط) يعطى المرافق للعدد المركب $y = x + iy$ بالشكل $x = x + iy = x - iy$ إن مجموع (حاصل ضرب) أى عدد مركب مع مرافقه عدد حقيقى .

$$|z| = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ تعطى بـ } z = x + iy \text{ للعدد المركب } |z| \text{ القيمة المطلقة}$$

$$\text{إن مايل واضح بشكل مباشر لأى عدد مركب } z = x + iy$$

$$|x| \leq |z| \text{ و } |y| \leq |z| \quad (14.1)$$

المتجهات :

ليكن X متجهاً ذا n مركبة على حقل الأعداد المركبة C . إن مثل هذه المتجهات فى مجموعها تكون الفراغ الإتجاهى $V_n(C)$. بما أن $V_n(R)$ حقل جزئى فى المتوقع أن كل نظرية تخص متجهات الفراغ $V_n(C)$ سنؤول لنظرية من نظريات الفصل ١٣ عند اعتبار المتجهات الحقيقية فقط .

إذا كان $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ متجهين من $V_n(C)$ فإن حاصل ضربهما الداخلى يعرف بالعلاقة :

$$X \cdot Y = \bar{X}Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n \quad (14.2)$$

يمكن تحقيق القوانين التالية التى تحكم حاصل الضرب الداخلى بسهولة تامة :

$$\begin{aligned} X \cdot Y + Y \cdot X &= 2R(X \cdot Y) \quad (أ) & X \cdot Y &= \overline{Y \cdot X} \quad (١) \\ X \cdot Y &\text{ حيث } R(X \cdot Y) \text{ هو الجزء الحقيقي من } X \cdot Y & (cX) \cdot Y &= \bar{c}(X \cdot Y) \quad (ب) \\ X \cdot Y - Y \cdot X &= 2C(X \cdot Y) \quad (د) & X \cdot (cY) &= c(X \cdot Y) \quad (ج) \\ X \cdot Y &\text{ حيث } C(X \cdot Y) \text{ هو الجزء التخيلى من } X \cdot Y & X \cdot (Y+Z) &= X \cdot Y + X \cdot Z \quad (د) \\ & & (Y+Z) \cdot X &= Y \cdot X + Z \cdot X \quad (هـ) \end{aligned} \quad (14.3)$$

أنظر المسألة ١

(١) إن هذا التعريف يوحي بشئ من الالتباس ومثل ذلك كتابة $i = \sqrt{-1}$ ويفضل تعريف العدد المركب $x + iy$ بالنقطة المرافقة $M(x, y)$ وتعريف i بالنقطة $A(0, 1)$.

يمرّف طول متجه X بالعلاقة $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
 يكون المتجهان X و Y متعامدين فيما إذا كان $X \cdot X = Y \cdot X = 0$
 لمتجهات الفراغ $V_n(C)$ تتحقق المتباينة المثلثية .

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad (14.4)$$

وكذلك تتحقق متباينة شوارز (أنظر المسألة ٢)

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad (14.5)$$

علاوة على ذلك (أنظر النظريات 1 VI من الفصل ١٣) ما يلي :

I. إن أى مجموعة من m متجه ذات الـ n مركبة على C المتعامدة كل منها على الأخرى والفسير صفرية هي مجموعة مستقلة خطيا ولذلك فهي تولد فراغا اتجاهيا $V_n^m(C)$.

II. إذا كان المتجه Y متعامدا مع كل من المتجهات X_1, X_2, \dots, X_m ذات الـ n مركبة فإنه يكون متعامدا مع الفراغ المولد بهذه المتجهات .

III. إذا كان $V_n^h(C)$ فراغا جزئيا من $V_n^k(C)$ حيث $h < k$ فإنه يوجد على الأقل متجه واحد X من $V_n^k(C)$ متعامدا مع $V_n^h(C)$.

IV. كل فراغ اتجاهي $V_n^m(C)$ حيث $0 < m$ يحوى m وليس الأكثر من m متجا متعامدة متنى (أى كل منها على الآخر) .

يسمى أساس $V_n^m(C)$ والمكون من متجهات متعامدة متنى أساس متعامدة . إذا كانت هذه المتجهات وحدة فإن هذا الأساس يسمى الأساس العيارى المتعامد .

طريقة جرام — شميت : إذا كان X_1, X_2, \dots, X_m أساساً للفراغ $V_n^m(C)$ فإننا نعرف :

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\ Y_3 &= X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\ &\dots \dots \dots \\ Y_m &= X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \dots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \end{aligned} \quad (14.6)$$

إن متجهات الوحدة $G_i = \frac{Y_i}{\|Y_i\|}$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m)$ تكون أساساً عيارى متعامداً للفراغ $V_n^m(C)$.

V. إذا كانت المتجهات X_1, X_2, \dots, X_s حيث $(m > s \geq 1)$ متجهات وحدة من $V_n^m(C)$ ومتعامدة متنى فإنه توجد متجهات وحدة (يمكن الحصول عليها بواسطة طريقة جرام — شميت) $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_m$ فى الفراغ بحيث تكون المجموعة X_1, X_2, \dots, X_m أساسا عياريا ومتعامدا .

مصفوفة جرام (جراميان) : لتكن X_1, X_2, \dots, X_n مجموعة متجهات ذات n مركبة عناصرها مركبة تعرف مصفوفة جرام على أنها .

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \dots & X_2 \cdot X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \dots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1' X_1 & \bar{X}_1' X_2 & \dots & \bar{X}_1' X_p \\ \bar{X}_2' X_1 & \bar{X}_2' X_2 & \dots & \bar{X}_2' X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}_p' X_1 & \bar{X}_p' X_2 & \dots & \bar{X}_p' X_p \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

إن من الواضح أن المتجهات تكون متعامدة كلا منها على الآخر فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) G قطرية .
إذا اتبعنا حل المسألة ١٤ من الفصل ١٧ فإنه يمكننا أن نرى من .

VI. لمجموعة مكونة من المتجهات X_1, X_2, \dots, X_p ذات الـ n مركبة عناصرها مركبة يكون $|G| \geq 0$ تتحقق المساواة فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) هذه المتجهات مرتبطة خطياً .

المصفوفة الواحدية : تسمى مصفوفة مربعة A من الدرجة n ، واحدية فيما إذا كان $(\bar{A})'A = A(\bar{A})' = I$ أى إذا كان $(\bar{A})' = A^{-1}$.

إن متجهات أعمدة (صفوف) مصفوفة واحدية ، تكون متجهات وحدة متعامدة متنى .

تمشياً مع النظريات المتعلقة بالمصفوفات المتعامدة التى أوردناها فى الفصل ١٣ يمكننا أن نذكر هنا :

VII. إن متجهات أعمدة (صفوف) مصفوفة مربعة وواحدية من n تؤلف أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n(C)$ والعكس صحيح .

VIII. إن منكوس ومنقول مصفوفة واحدية هما مصفوفتان واحديتان .

IX. إن حاصل ضرب مصفوفتين واحديتين أو أكثر هى مصفوفة واحدية .

X. إن محددة مصفوفة واحدية تساوى الواحد .

التحويلات الواحدية : يسمى التحويل الخطى .

$$Y = AX \quad (14.8)$$

عندما تكون المصفوفة A واحدية ، تحويلاً واحدياً .

XI. يحافظ التحويل الخطى على الأطوال (ونتيجة لذلك على حاصل الضرب الداخلى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته مصفوفة واحدية .

XII. إذا كان $Y = AX$ تحويلاً للاحداثيات من أساس E لأساس آخر Z فإن الأساس Z يكون عيارياً

متعامداً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A واحدية .

مسائل محلولة

$$Y = [2+3i, 1-2i, i]', \quad \text{و} \quad X = [1+i, -i, 1]'$$

$$X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y) \quad \text{حقق (ج)} \quad \text{أوجد (أ) } X \cdot Y \text{ و } Y \cdot X$$

$$X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y) \quad \text{حقق (د)} \quad \text{أوجد (ب) } X \cdot Y = Y \cdot X$$

$$(a) \quad X \cdot Y = \bar{X}' Y = [1-i, i, 1] \begin{bmatrix} 2+3i \\ 1-2i \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(2+3i) + i(1-2i) + 1(i) = 7+3i \quad (1)$$

$$Y \cdot X = \bar{Y}' X = [2-3i, 1+2i, -i] \begin{bmatrix} 1+i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = 7-3i$$

(ب) من (١) : أن $Y \cdot X$ المرافق لـ $X \cdot Y$ هو $7+3i = X \cdot Y$.

$$X \cdot Y + Y \cdot X = (7+3i) + (7-3i) = 14 = 2(7) = 2R(X \cdot Y) \quad (ج)$$

$$X \cdot Y - Y \cdot X = (7+3i) - (7-3i) = 6i = 2(3i) = 2C(X \cdot Y) \quad (د)$$

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|. \quad ٢- برهن متباينة شوارز .$$

كافي حالة المتجهات الحقيقية ، تكون المتباينة صحيحة إذا كان $X = 0$ أو $Y = 0$.

عندما يكون X و Y متجهين غير صفريين ويكون a عددا حقيقيا يكون

$$\|aX+Y\|^2 = (aX+Y) \cdot (aX+Y) = a^2 X \cdot X + a(X \cdot Y + Y \cdot X) + Y \cdot Y = a^2 \|X\|^2 + 2aR(X \cdot Y) + \|Y\|^2 \geq 0.$$

بما أن الدالة التربيعية في a تكون غير سالبة إذا كان (وإذا كان فقط) يميزها غير موجب أى :

$$R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad \text{و} \quad R(X \cdot Y)^2 - \|X\|^2 \|Y\|^2 \leq 0$$

إذا كان $X \cdot Y = 0$ فإن $|X \cdot Y| = R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$. أما إذا كان $X \cdot Y \neq 0$ فإننا نعرف $c = \frac{X \cdot Y}{|X \cdot Y|}$

ونجد عندما $R(cX \cdot Y) \leq \|cX\| \cdot \|Y\| = |c| \|X\| \cdot \|Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$ بينا من (ب) (14.3) نجد $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ أى $R(cX \cdot Y) = R[\bar{c}(X \cdot Y)] = |X \cdot Y|$.

٣- برهن أن $B = (A')^*$ مصفوفة هيرميتية لأى مصفوفة مربعة A .

$$\text{وهذا يعنى أن } B \text{ هيرميتية.} \quad (\bar{B})' = \{(\bar{A})A'\}' = (\bar{A}\bar{A})' = (\bar{A})A = B$$

٤- إذا كانت $A = B + iC$ مصفوفة هيرميتية ، فبرهن أن $(A')^*$ تكون حقيقية إذا كانت (وإذا كانت فقط) B و C متبادلتين عكسيا .

بما أن $B + iC$ مصفوفة هيرميتية فإن $(\bar{B} + i\bar{C})' = B + iC$; وهكذا يكون :

$$(\bar{A})'A = (\bar{B} + i\bar{C})'(B + iC) = (B + iC)(B + iC) = B^2 + i(BC + CB) - C^2$$

ويكون ذلك حقيقيا إذا كان (وإذا كانت فقط) $BC + CB = 0$ أو $BC = -CB$ أى إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفتان B و C متبادلتين عكسيا .

٥- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية فإن iA تكون هيرميتية .

اعتبر $B = -iA$ بما أن A هيرميتية تخالفية ، فإن $(\bar{A})' = -A$ أى

$$(\bar{B})' = (\bar{-iA})' = i(\bar{A})' = i(-A) = -iA = B$$

وهذا ما يبرهن على أن B هيرميتية . يمكن للقارئ النظر فى الحالة $B = iA$.

مسائل إضافية

٦- إذا أعطيت المتجهات $X_3 = [i, 1-i, 2]'$ ، $X_1 = [i, 2i, 1]'$ ، $X_2 = [1, 1+i, 0]'$.

(أ) أوجد $X_1 \cdot X_2$ و $X_2 \cdot X_3$.

(ب) أوجد طول كل متجه X_i

(ج) أثبت أن المتجه $[1-i, -1, 1-i]'$ متعامد مع كل من X_1 و X_2 .

- (د) أوجد متجهها متعامداً مع كل من X_1 و X_3
 الجواب : (أ) $2-3i$ و $-i$ (ب) $\sqrt{6}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$
 (د) $[-1-5i, i, 3-i]$

٧- برهن أن المتجهات $[i, 1-i, 0]'$, $[1+i, i, 1]'$ و $[1-i, 1, 3i]'$ مستقلة خطياً ومتعامدة كل منها على الأخرى .

٨- برهن صحة العلاقة (14.3)

٩- برهن صحة المتباينة المثلثية .

١٠- برهن صحة النظريات IV - I .

١١- استنتج العلاقة (14.6)

١٢- باستخدام العلاقات (14.6) ومن المتجهات المعطاة أدناه مرتبة كون أساس عيارى متعامد للفراغ $V_3(C)$ عندما تكون المتجهات هي

$$(أ) [0, 1, -1]', [1+i, 1, 1]', [1-i, 1, 1]'$$

$$(ب) [1+i, i, 1]', [2, 1-2i, 2+i]', [1-i, 0, -i]'$$

$$(أ) [0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]', [\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]', [-\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)]'$$

$$(ب) [\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}]', [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1-5i}{4\sqrt{3}}, \frac{3+3i}{4\sqrt{3}}]', [\frac{7-i}{2\sqrt{30}}, \frac{-5}{2\sqrt{30}}, \frac{-6+3i}{2\sqrt{30}}]'$$

١٣- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة معرفة على حقل الأعداد المركبة فإن $A + \bar{A}$ تكون ذات عناصر حقيقية فقط وأن $A - \bar{A}$ تكون ذات عناصر تخيلية بحتة فقط .

١٤- برهن صحة النظرية V .

١٥- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن :

(أ) تكون المصفوفة \bar{A} قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) أعمدة A متجهات متعامدة متشئ .

(ب) يكون $\bar{A} = A$ (وإذا كانت فقط) أعمدة A متجهات وحدة متعامدة متشئ .

١٦- برهن أنه إذا كان X و Y متجهين ذوى n مركبة وكانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $X \cdot AY = \bar{A}' X \cdot Y$.

١٧- برهن صحة النظريات VII - X

١٨- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية بحيث تكون $I + A$ غير شاذة فإن $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ تكون مصفوفة واحدة .

$$١٩- استخدم المسألة ١٨ لتكوين مصفوفة واحدة فيما إذا أعطيت (أ) $\begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$$$

$$\text{الجواب : (أ) } \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix} \text{ (ب) } \frac{1}{29} \begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix}$$

٢٠- برهن أنه إذا كان كل من A و B مصفوفة واحدة وكانتا من نفس الدرجة فإن كلا من AB و BA تكون واحدة .

٢١- تابع برهان المسألة ١٠ من الفصل ١٣ لتبرهن النظرية XI

٢٢- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدة وهرمتية فإن A مصفوفة ملتفة .

$$23 - \text{برهن أن } \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix} \text{ هي مصفوفة واحدة.}$$

24 - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدة وكان $B = AP$ حيث P غير شاذة ، فإن $P^{-1}B$ تكون واحدة .

25 - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدة وكانت $I+A$ غير شاذة ، فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ تكون مصفوفة هرميتية تخالفية .

الفصل الخامس عشر

التطابق

المصفوفات المتطابقة :

نقول عن مصفوفتين A و B من الدرجة n على F إنهما متطابقتان و C و F فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P على F تحقق العلاقة :

$$B = P^{-1} A P \quad (15.1)$$

إن من الواضح أن التطابق هو حالة خاصة من التكافؤ لذلك فالمصفوفات المتطابقة لها نفس الرتبة .

عندما يعبر عن P بحاصل ضرب أعمدة مصفوفات أولية ، فإن P^{-1} يكون حاصل الضرب بترتيب معاكس لنفس مصفوفات الصفوف الأولية ، أي أن A و B تكونان مصفوفتين مطابقتين إذا كان من الممكن أن تختزل A إلى B بمتواليات من أزواج التحويلات الأولية بحيث يتكون كل زوج منها من تحويل صفوف أولى يتبعه نفس تحويل الأعمدة الأولى .

المصفوفات المتماثلة : سنبرهن في المسألة ١

١ . كل مصفوفة متماثلة A رتبها r على F تطابق على F مصفوفة قطرية تكون عناصرها القطرية الأولى والتي عددها r غير صفيرية بينما تكون بقية العناصر أصفارا .

مثال ١ :

أوجد مصفوفة غير شاذة P عناصرها أعداد جذرية ، بحيث تكون $D = P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية ، علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

لاختزال A إلى D نستعمل $[A \ I]$ ونحسب ، خلال ذلك ، P^{-1} . نستعمل أولا $H_{21}(-2)$ و $K_{21}(-2)$ ثم $H_{31}(-3)$ و $K_{31}(-3)$ و $H_{41}(-2)$ و $K_{41}(-2)$ لكي نحصل على أصفار في الصف الأول والعمود الأول . سنوفر كثيرا من الوقت فيما لو طبقنا أولا التحويلات الثلاثة للمصفوف ثم اتبعناها بالتحويلات الثلاثة للأعمدة . وإذا لم نحول A إلى مصفوفة متماثلة فإن ذلك يكون نتيجة خطأ ما قد حدث . والآن :

$$\begin{aligned}
 [A H] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 &= [D P']
 \end{aligned}$$

ويكون إذن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة D التي اختزلت إليها المصفوفة A ليست وحيدة . فالتحويلين الإضافيين $H_3(1/2)$ و $K_3(1/2)$ مثلا ،

يحول D إلى المصفوفة القطرية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بينما تستبدل التحويلات $H_2(3)$ و $K_2(3)$ المصفوفة D بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية ثانية ، لا يوجد زوج من التحويلات العادية (القياسية) أو الحقيقية قادرة أن تستبدل D

بمصفوفة قطرية عناصر قطرها أعداد غير سالبة فقط .

المصفوفات الحقيقية المماثلة :

بفرض أن المصفوفة الحقيقية المماثلة A قد اختزلت بواسطة تحويلات حقيقية أولية إلى مصفوفة متطابقة قطرية D . أي لنفرض أن $P^{-1}AP = D$ بينما تعتمد العناصر القطرية غير الصفرية في D على كل من A و P فإنه سيتضح في الفصل ١٧ أن عدد العناصر القطرية الموجبة وغير الصفرية تعتمد فقط على A .

بواسطة متتالية من تحويلات الصفوف ومثيلاتها من تحويلات الأعمدة من النوع ١ فإنه يمكن إعادة ترتيب العناصر القطرية في D بحيث تقع العناصر الموجبة قبل العناصر السالبة . وبعد ذلك فإنه من الممكن استعمال متتالية من تحويلات الصفوف الحقيقية وتحويلات الأعمدة المماثلة ومن النوع ٢ لاختزال المصفوفة القطرية لمصفوفة قطرية تكون فيها العناصر غير الصفرية مساوية إما +1 أو -1 ويكون عندئذ :

II. إن كل مصفوفة حقيقية ممتلئة رتبها r تكون متطابقة ، على حقل الأعداد الحقيقية ، مع مصفوفة قانونية من الشكل :

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

إن العدد الصحيح P الوارد في (15.2) يدعى دليل المصفوفة كما يدعى العدد $p = (r - p)$ شارته المصفوفة .

مثال ٢ :

إذا طبقنا التحويلات H_{23}, K_{23} و $H_2(\frac{1}{2}), K_2(\frac{1}{2})$ على نتيجة المثال ١ فإننا نجد :

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [C|Q]$$

ونجد أيضا $Q^*AQ = C$. وهكذا فإن A من الرتبة $r = 3$ والدليل $p = 2$ وشارته $s = 1$

III. تكون مصفوفتان مربعتان ممتلئتان من درجة n متطابقتين على حقل الأعداد الحقيقية فيما إذا كان (وإذا كان

فقط) لهما نفس الرتبة ونفس الدليل أو إذا كان لهما رتبة واحدة وشارته واحدة .

في حقل الأعداد الحقيقية ، كل المصفوفات المربعة من الدرجة n من النوع (15.2) هي مجموعة قانونية متطابقة

لمجموعة المصفوفات الحقيقية المربعة الممتلئة ذات الدرجة n .

في حقل الأعداد المركبة ، يكون :

IV. كل مصفوفة مربعة مركبة ممتلئة ذات الرتبة r تكون متطابقة على حقل الأعداد المركبة مع مصفوفة قانونية

من الشكل :

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

مثال ٣ :

إذا طبقنا التحويلين $H_3(i)$ و $K_3(i)$ على ناتج المثال ٢ فإننا نجد :

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [D|R']$$

$$R'AR = D = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ونجد أيضا :

أنظر المسألين ٢ - ٣

V. تكون مصفوفتان مركبتان ممتلئتان من الدرجة n متطابقتين على حقل الأعداد المركبة إذا كانتا (وإذا

كانتا فقط) من رتبة واحدة .

المصفوفات المتماثلة التخالفية

إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية فإن :

$$(PAP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(-A)P = -P^{-1}AP$$

وعلى ذلك :

VI. كل مصفوفة $B = P^{-1}AP$ متطابقة مع مصفوفة متماثلة تخالفية A ، هي أيضا مصفوفة متماثلة تخالفية .
سنبرهن في المسألة ٤ :

VII. كل مصفوفة A مربعة من درجة n متماثلة تخالفية على F تكون متطابقة على F مع مصفوفة قانونية .

$$B = \text{diag} (D_1, D_2, \dots, D_t, 0, \dots, 0) \quad (15.4)$$

$$\text{حيث : } r = 2t \text{ إن رتبة } A \text{ هي } r \quad D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, (i = 1, 2, \dots, t).$$

أنظر المسألة ٥ .

ومنه :

VIII. أى مصفوفتان ، مربعتان من الدرجة n متماثلتان تخالفيتان على F ، تكونان متطابقتان على F إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

إن مجموعة كل المصفوفات ذات الشكل (15.4) هي مجموعة قانونية بالنسبة للتطابق مع المصفوفات المربعة من الدرجة n المتماثلة التخالفية .

المصفوفات الهرميتية :

نقول عن مصفوفتين A و B مربعتين هرميتيتين من الدرجة n إنهما متطابقتان هرميتيا $[HC]$ أو إنهما مقترنتان (موحدتان) فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$B = \bar{P}AP \quad (15.5)$$

أى :

IX. تكون مصفوفتان مربعتان هرميتيتان من الدرجة n ، مقترنتان فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن الحصول على إحداها من الأخرى بواسطة متتالية من أزواج التحويلات الأولية ، يتكون كل واحد من هذه الأزواج من تحويل أعمدة وتحويل الصفوف المرافق المناظر .

X. إن مصفوفة هرميتية A رتبها r تكون مقترنة مع مصفوفة قانونية

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.6)$$

إن العدد الصحيح p الوارد في (15.6) يدعى دليل A وإن العدد $s = p - (r - p)$ يدعى شارة هذه المصفوفة .

XI. تكون مصفوفتان مربعتان هرميتيتان من الدرجة n مقترنتان فيما إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة ودليل واحد أو من رتبة واحدة وشارة واحدة .

إن اختزال مصفوفة هرميتية إلى الشكل القانوني (15.6) يتبع الطريقة الواردة في المسألة ١ مع الانتباه إلى أزواج التحويلات الأولية المناسبة . تماثل المسألة ٧ الحالة الأكثر إزعاجا في هذا الموضوع .
أنظر المسألتين ٦ - ٧

المصفوفات الهرميتية المتخالفة :

إذا كانت A مصفوفة هرميتية متخالفة فإنه يكون :

$$(\overline{PAP})' = (\overline{PAP}) = -\overline{PAP}$$

ونجد :

XII . أن كل مصفوفة $P^* A P = B$ مقترنة مع مصفوفة هرميتية متخالفة A هي أيضا مصفوفة هرميتية متخالفة .
استنادا إلى المسألة ٥ من الفصل ١٤ نجد أن $H = -iA$ هي مصفوفة هرميتية إذا كانت A هرميتية متخالفة . واستنادا إلى النظرية X توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$\overline{P}HP = C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{و هكذا يكون } i\overline{P}HP = i\overline{P}(-iA)P = \overline{PAP} = iC$$

$$B = \overline{PAP} = \begin{bmatrix} iI_p & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.7)$$

وعلى ذلك :

XIII . إن كل مصفوفة A مربعة هرميتية ، متخالفة من درجة n ، تكون مقترنة مع مصفوفة من الشكل (15.7) حيث r هي رتبة A و p دليل المصفوفة $-iA$.
XIV . مصفوفتان A و B مربعتان هرميتيتان متخالفتان من الدرجة n تكونان مقترنتان فيما إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة وكانت $-iA$ و $-iB$ لهما نفس الدليل .

أنظر المسألة ٨

مسائل محلولة

١ - برهن أنه يمكن اختزال كل مصفوفة متماثلة على F رتبها r إلى مصفوفة قطرية تحوى بالضبط r عنصرا غير صفري على قطرها .

لنفرض أن المصفوفة المتماثلة $A = [a_{ij}]$ غير قطرية . إذا كان $a_{11} \neq 0$ فإن متتالية من أزواج التحويلات الأولية من النوع ٣ يتكون كل واحد منها من تحويل صفوف ونفس تحويل الأعمدة ، تختزل A إلى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

نتابع التحويل طالما أن b_{22}, c_{33}, \dots تختلف عن الصفر . لنفرض أنه ، خلال الاختزال حصلنا على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{ss} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{s+1, s+2} & \dots & k_{s+1, n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{s+2, s+1} & k_{s+2, s+2} & \dots & k_{s+2, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n, s+1} & k_{n, s+2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث العنصر القطري هو $k_{s+1, s+1} = 0$. إذا كان كل $k_{ij} = 0$ تكون قد برهنا النظرية لقيم $s = r$ أما إذا كانت بعض العناصر k_{ij} ، مثل $k_{s+u, s+v} \neq 0$ فإننا ننقله إلى الموضع $(s+1, s+1)$ بالتحويلين الصفى والمودى الملائمين ومن النوع ١ عندما تكون $u = v$. وإذا لم يكن ذلك فإننا نضيف إلى الصف ذى الرقم $(s+v)$ الصف ذا الرقم $(s+u)$ وبعد تطبيق تحويل الأعمدة المناظر . فإننا نحصل على عنصر قطري غير صفري . (عندما يكون $a_{11} = 0$ فإننا نعمل كما فى الحالة $k_{s+1, s+1} = 0$ السالفة الذكر) .

بما أننا توصلنا إلى متتالية من المصفوفات المتكافئة ، فإن المصفوفة A ستختزل ، فى نهاية المطاف ، إلى مصفوفة قطرية ، لا يساوى أى عنصر من العناصر الـ r الأول من قطرها ، الصفر بينما يساوى كل عنصر آخر منها الصفر .

٢- اختزل المصفوفة المماثلة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ إلى الصيغة القانونية (15.2) وإلى الشكل القانونى (15.3)

وفى كل من الحالتين أوجد المصفوفة P التى تقوم بهذا الاختزال .

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &= [D|P'_1] \end{aligned}$$

المحول على (15.2) ، نكتب :

$$[D|P'_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] = [C|P']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ونجد :}$$

لإيجاد (15.3) ، نكتب

$$[D | P'_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i & -i & 0 \end{array} \right] = [C | P']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 2i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك :

٢- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP شكلا قانونيا من النوع (15.3)

علما أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$$

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 2-i & 10+2i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-2i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 3-2i & 10 & -1-i & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+12i & 1+2i & -3+2i & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7+4i}{13} & \frac{-5+12i}{13} & \frac{3-2i}{13} \end{array} \right]$$

$$= [C | P']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -i & \frac{7+4i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5+12i}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3-2i}{13} \end{bmatrix}$$

حيث :

٣- برهن أن كل مصفوفة A مربعة متماثلة تخالفية من الدرجة n على F ومن الرتبة $2t$ تكون متطابقة على F مع مصفوفة من الشكل :

$$B = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_t, 0, \dots, 0)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

حيث

إذا كانت $A = 0$ فإن $A = B$ إذا كانت $A \neq 0$ فإنه يوجد ، بعض $a_{ij} = -a_{ji} \neq 0$ لنبادل بين الصف ذى الرقم i والصف الأول ولنبادل أيضا بين الصف ذى الرقم j والصف الثانى ثم لنبادل بين العمود ذى الرقم i والعمود الأول والعمود ذى الرقم j والعمود الثانى فتتحول A إلى المصفوفة المتماثلة التخالفية

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a_{ij} & E_2 & \\ -a_{ij} & 0 & & \\ \hline & & E_3 & E_4 \end{array} \right]$$

لنضرب أخيرا ، الصف الأول والعمود الأول بـ $1/a_{ij}$ فنحصل على المصفوفة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & F_2 & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & F_3 & E_4 \end{array} \right]$$

، ومنها تطبيق تحويلات صفوف وأعمدة أولية من النوع ٣ ، نحصل على :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 0 & & F_4 \\ \hline & & 0 & F_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} D_1 & 0 & & \\ 0 & F_4 & & \end{array} \right]$$

إذا كانت $F_4 = 0$ فإن الاختزال يكون تاما وإلا فإن العملية تكرر على F_4, \dots, F_n حتى نحصل على المصفوفة B .
 • - أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $P^{-1}AP$ من الشكل القانونى (15.4) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مستخدما $a_{13} \neq 0$ فإننا نحتاج فقط ، أن نبادل بين الصفين الثالث والثانى ونتبع ذلك بأن نبادل بين

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{لكي نحصل على} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

العمودين الثالث والثانى .

نضرب ، بعد ذلك ، الصف الاول والعمود الاول فى $1/2$ ونتبع ذلك بأن نخلص الصفين الأولين والعمودين الأولين من العناصر الغير صفرية ، فنجد على التعاقب :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] , \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

وأخيرا نضرب الصف الثالث والعمود الثالث فى $1/5$ - لنحصل على

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} D_1 & 0 & & \\ 0 & D_2 & & \end{array} \right] P'$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/10 & -1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P'AP = \text{diag}(D_1, D_2). \quad \text{وهكذا عندما يكون}$$

٦- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون المصفوفة $\bar{P}AP$ في الشكل القانوني (15.6) علما بأن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -3+2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -i & 0 & 1 & 0 \\ -3-2i & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & 0 & \frac{2-3i}{13} & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3i}{5\sqrt{13}} & \frac{13}{5\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3+2i}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array} \right]$$

$$= [C|\bar{P}']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+3i}{5\sqrt{13}} & \frac{3-2i}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{5\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

ونجد :

٧- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $\bar{P}AP$ من الشكل القانوني (15.6) علما أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5i & 2 & 1 & i \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & 1 & i \\ 0 & 0 & -5/2 & -2-2i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$HC \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & -1 & | & \frac{-4-4i}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$= [C|\bar{P}']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4+4i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

٨- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $\bar{P}'AP$ من الشكل القانوني (15.7) علما أن

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{bmatrix}$$

$$H = -iA = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 2 \end{bmatrix} \quad \text{اعتبر المصفوفة الهرميتية}$$

$$\bar{P}'HP = \text{diag}[1, 1, -1]. \quad \text{تحقق الملاحظة} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{إن المصفوفة غير الشاذة.}$$

$$\bar{P}'AP = \text{diag}[i, i, -i]. \quad \text{ونجد أخيرا}$$

مسائل إضافية

٩- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $\bar{P}'AP$ في الصيغة القانونية (15.2) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (أ)}$$

١٠- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $\bar{P}'AP$ في الصيغة القانونية (15.3) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-4i \\ 1+i & 1+i & -1-2i \\ 2-4i & -1 & -3-5i \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1+2i & 1+4i \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & i/\sqrt{2} & (1+i)/2 \\ 0 & (1-i)/\sqrt{2} & (-3-2i)/13 \\ 0 & 0 & (3+2i)/13 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-2i) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

١١- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP في الصيغة القانونية (15.4) علماً بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب : (1)}$$

١٢- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP في الصيغة القانونية (15.6) علماً بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1-i & 3 & 3-4i \\ 3+2i & 3+4i & 18 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 4 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 10 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-2+5i) \\ 0 & 1 & (-2-i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-5-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & (2-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1+3i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

١٣- أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^*AP في الصيغة القانونية (15.7) علماً بأن :

$$A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1-i \\ 1 & -1-i & -i \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 1-2i \\ -2+i & -1-2i & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & i & 6i \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \text{الجواب (1)}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب (1)}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-2i)/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-2-i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (د) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2+3i \\ 0 & 1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \text{الجواب (1)}$$

$$C^*DC = D \quad \text{فبرهن أن هناك مصفوفة } C \text{ مربعة من الدرجة الثانية تحقق } D \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{١٤- إذا كان}$$

فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|C| = 1$

١٥- لنفرض أن A مصفوفة غير شاذة مربعة من الدرجة n حقيقية ومتماثلة دليلاً p . برهن أن $|A| > 0$ فيما

إذا كان (وإذا كان فقط) $n - p$ زوجياً .

١٦- برهن أن مصفوفة غير شاذة ومتماثلة A تكون متطابقة مع معكوسها .

إرشاد : خذ $P = B^*B$ حيث $B^*AB = I$ ثم بين أن $P^*AP = A^{-1}$

١٧- أعد كتابة المناقشة المتعلقة بالمصفوفات المتماثلة الواردة في برهان النظرية 1 لكي تحصل على العلاقة (15.6) الخاصة بالمصفوفات الهرميتية .

١٨- برهن أنه إذا كان $A \sim B$ فإن A تكون متماثلة (متماثلة تخالفية) فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة B متماثلة (متماثلة تخالفية) .

١٩- لتكن S مصفوفة غير شاذة ومتماثلة و T مصفوفة متماثلة تخالفية بحيث يكون $(S + T)(S - T)$ مصفوفة غير شاذة . بين أن $P'SP = S$ عندما يكون

$$P = (S+T)^{-1}(S-T)$$

$$P'SP = [(S-T)^{-1}(S+T)S^{-1}(S-T)(S+T)^{-1}]^{-1}. \quad \text{إرشاد :}$$

٢٠- لتكن S مصفوفة غير شاذة ومتماثلة و T أى مصفوفة بحيث تكون المصفوفة $(S + T)(S - T)$ غير شاذة . بين أنه إذا كان $P'SP = S$ عندما يكون $P = (S + T)^{-1}(S - T)$ وكذلك $I + P$ غير شاذة فإن T تكون متماثلة تخالفية .

$$T = S(I-P)(I+P)^{-1} = S(I+P)^{-1}(I-P). \quad \text{إرشاد :}$$

٢١- برهن أن تطابق المصفوفات المربعة من الدرجة n هى علاقة تكافؤ .

$$X = BU \quad \text{و} \quad x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (16.2)$$

ولنفرض أن المتغيرات y والتي عددها n متغيرا استبدلت بمتغيرات جديدة U بواسطة التحويل الخطي

$$Y = CV \quad \text{أو} \quad y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16.3)$$

فنجد $X'AY = (BU)'A(CV) = U'(B'AC)V$. والآن بتطبيق التحويلين الخطيين $V = IY$ و $U = IX$ فإننا نحصل على صيغة ثنائي خطية جديد في المتغيرات الأصلية $X'(B'AC)Y = X'DY$.

نقول عن صيغتي ثنائي الخطية إنهما متكافئتا فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطي غير شاذ يحول إحدى المصفغ الأخرى.

I. تكون صيغتا ثنائي الخطية ، مصفوفتهما A و B من الدرجة $m \times n$ على F متكافئتين على F إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

إذا كانت رتبة (16.1) هي r ، فإنه يوجد (أنظر الفصل ٥) مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون :

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا أخذنا $B = P'$ في (16.2) و $C = Q$ في (16.3) فإن صيغة ثنائي الخطية تختزل إلى :

$$U'(PAQ)V = U' \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_r v_r \quad (16.4)$$

أي :

II. يمكن اختزال أي شكل (صيغة) ثنائي الخطية على F ، رتبته r ، بواسطة تحويل خطي غير شاذ على F أيضا ،

إلى الشكل القانوني $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_r v_r$.

مثال ٢ : لمصفوفة الشكل ثنائي الخطية $X'AY = X' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$ الواردة في المثال ١ :

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A I_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= Q \\ &= I_3 P' \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $X = PU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U$ ، $Y = QV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V$ ، تختزل $X'AY$ إلى :

$$U' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V = U'I_3V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

وتكون معادلات التحويل

$$\begin{cases} y_1 = v_1 & - v_3 \\ y_2 = & v_2 + v_3 \\ y_3 = & v_3 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 \\ x_2 = & u_2 \\ x_3 = & u_3 \end{cases}$$

أنظر المسألة ٢

أنواع الصيغ ثنائية الخطية :

نقول عن شكل ثنائي الخطية $X'AY$ أنه : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مماثل} \\ \text{مماثلة تخالفية} \\ \text{هرميتية} \\ \text{هرميتية تخالفية} \end{array} \right\} \quad \text{فيما إذا كانت } A \quad \left. \begin{array}{l} \text{مماثل} \\ \text{متناوب} \\ \text{هرميتي} \\ \text{هرميتي متناوب} \end{array} \right\}$$

التحويلات الموافقة التغير :

اعتبر صيغة ثنائي الخطية $X'AY$ في المجموعتين ذات n متغيران (x_1, x_2, \dots, x_n) و (y_1, y_2, \dots, y_n) إذا خضعت المتغيرات x والمتغيرات y لنفس التحويل $X = CU$ و $Y = CV$ فإننا نقول إن هذه المتغيرات قد تحولت بشكل موافق التغير ويكون :

III. باستخدام التحويل الموافق التغير $X = CU$ ، $Y = CV$ ، يتحول الشكل ثنائي الخطية $X'AY$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، إلى الشكل ثنائي الخطية $U'(C'AC)V$. إذا كانت المصفوفة A مماثلة فإن $C'AC$ تكون أيضا . أي :

IV. يبقى الشكل ثنائي الخطية المماثل ، بعد تحويل موافق التغير للمتغيرات ، مماثلا أيضا .

V. نقول على شكلين ثنائيي الخطية على F إنهما متكافئان بالنسبة للتحويلات الموافقة التغير للمتغيرات ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتهما متطابقتان على F .

نستنتج من النظرية I من الفصل ١٥ ما يلي :

VI. يمكن تحويل شكل ثنائي الخطية ومماثل رتبته r ، بواسطة تحويل موافق التغير للمتغيرات غير شاذ إلى الشكل :

$$a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + \dots + a_r x_r y_r \quad (16.5)$$

من النظرية II والنظرية IV من الفصل ١٥ ينتج :

VII. يمكن تحويل شكل ثنائي الخطية حقيقي رتبته r مماثل بواسطة تحويل موافق التغير غير شاذ للمتغيرات من حقل الأعداد الحقيقية إلى الشكل :

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_r y_r \quad (16.6)$$

وفي حقل الأعداد المركبة إلى الشكل .

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_r y_r \quad (16.7)$$

أنظر المسألة ٢

التحويل مخالف التغير :

بفرض أن الشكل ثنائي الخطية هو ذلك الوارد في الفقرة السابقة . إذا إخضعت المتغيرات x إلى التحويل $X = (C^{-1})^T U$ والمتغيرات y إلى التحويل $Y = C^T V$ فإننا نقول عن المتغيرات إنها قد تحولت بشكل مخالف التغير .

ونجد :

VIII. باستخدام تحويل مخالف التغير $X = (C^{-1})^T U$ و $Y = C^T V$ يتحول الشكل ثنائي الخطية $X^T A Y$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n إلى الشكل ثنائي الخطية $U^T (C^{-1} A C) V$.

IX. يتحول الشكل ثنائي الخطية $X^T Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ إلى الشكل ذاته فيما إذا كان (وإذا كان فقط) تحويل مجموعي المتغيرات تم بواسطة تحويل مخالف التغير .

الشكل ثنائي الخطية القابل للتحليل لعوامل : سبرهن في المسألة ٤ :

X. يمكن تحليل شكل ثنائي الخطية غير صفري لعوامل فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبته مساوية الواحد .

مسائل محلولة

$$x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - 13x_1 y_3 - 4x_2 y_1 + 15x_2 y_2 - x_2 y_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix} Y. \quad ١$$

٢- اختزل $x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_1 y_3 - 2x_1 y_4 + 2x_2 y_1 - 2x_2 y_2 + x_2 y_3 + 3x_2 y_4 + 3x_3 y_1 + 4x_3 y_3 + x_3 y_4$ إلى شكل قانوني .

إن مصفوفة الصيغة هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. من المسألة ٦ من الفصل الخامس نجد أن المصفوفتين غير الشاذتين

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{تحققان العلاقة} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطيتين :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3 - \frac{1}{3}v_4 \\ y_2 = -\frac{1}{6}v_2 - \frac{5}{6}v_3 + \frac{7}{6}v_4 \\ y_3 = v_3 \\ y_4 = v_4 \end{array} \right. , \quad Y = QV, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ x_2 = u_2 - u_3 \\ x_3 = u_3 \end{array} \right. , \quad X = P^T U$$

يجولان $X^T A Y$ إلى $u_1 v_1 + u_2 v_1$

٣- حول صيغة ثنائى الخطية المتماثل $X'AY = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix} Y$ بواسطة تحويل موافق التغير (١) إلى (16.5) حل

حل الأعداد الجبرية ، (ب) إلى (16.6) على حل الأعداد الحقيقية و (ج) إلى (16.7) على حل الأعداد المركبة .

(١) من المثال ١ - الفصل ١٥ - نجد أن التحويلين الخطيين

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} U, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} V$$

يحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 - u_2v_2 + 4u_3v_3$.

(ب) من المثال ٢ - الفصل ١٥ - نجد أن التحويلين الخطيين

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$$

يحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

(ج) من نتائج المثال ٢ من الفصل ١٥ ، يمكننا أن نجد

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

وهكذا فإن التحويلين الخطيين

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3.$$

٤- برهن أنه ليكون شكل ثنائى الخطية غير صفري $f(x, y)$ قابلا لتحليل إلى عوامل فإنه يلزم ويكفى أن تكون رتبته مساوية الواحد .

لنفرض أن الشكل قابل لتحليل إلى عوامل : أى أن

$$\sum \sum a_{ij} x_i y_j = (\sum b_i x_i)(\sum c_j y_j) = \sum \sum b_i c_j x_i y_j$$

وعلى ذلك $a_{ij} = b_i c_j$. إن من الواضح أن أى مصفر من الدرجة الثانية من $A = [a_{ij}]$ مثل

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i b_j & a_i b_s \\ a_k b_j & a_k b_s \end{bmatrix} = b_j b_s \begin{bmatrix} a_i & a_i \\ a_k & a_k \end{bmatrix}$$

يتلاشى وهذا يؤدي إلى أن رتبة A مساوية الواحد .

على العكس ، لنفرض أن الشكل ثنائى الخطية من الرتبة ١ ، إذن نجد من النظرية ١ أنه يوجد تحويلات خطية غير شاذة تحول الشكل المفروض إلى $U(B'AC)V = u_1v_1$ ، والآن التحويلات المكمية للتحويلات

$v_i = \sum_j s_{ij} y_j$, $u_i = \sum_j r_{ij} x_j$
 تحول u_1, v_1 إلى $(\sum_j r_{ij} x_j)(\sum_j s_{ij} y_j) = f(x, y)$ وعلى ذلك تكون $f(x, y)$ قابل التحليل إلى عوامل .

مثال اضافية

٥ - أوجد تحويلات خطية تحتزل كلا من الصيغ ثنائية الخطية التالية إلى الشكل القانوني (16.4)

$$x_1 y_1 - 2x_1 y_3 + 3x_2 y_1 + x_2 y_2 - 3x_2 y_3 - x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_3 y_3 \quad (1)$$

$$X' \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} Y \quad X' \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} Y, \quad (ج) \quad X' \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y, \quad (ب)$$

٦ - أوجد تحويلا موافق التغير يحول :

$$(1) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix} Y \quad (ب) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} Y \quad \text{إلى الشكل القانوني (16.6)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الجواب (1)}$$

٧ - إذا كانت C_1, C_2 و B_1, B_2 مصفوفات مربعة من الدرجة n غير شاذة بحيث يكون $B_1 A_1 C_1 = B_2 A_2 C_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد التحويل الذي يحول $X' A_1 Y$ إلى $U' A_2 V$.

$$\text{الجواب} \quad X = (B_2^{-1} B_1)' U, \quad Y = C_1 C_2^{-1} V$$

٨ - فسر المسألة ٢٣ في الفصل ٥ باستعمال زوج من الأشكال ثنائية الخطية .

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} V \quad \text{الجواب} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} U, \quad \text{اكتب التحويل مخالف التغير لـ}$$

١٠ - برهن أن تحويلا متعامدا هو تحويل مخالف التغير مع نفسه ، أى أن $X = P U$ و $Y = P V$.

١١ - برهن النظرية ١٥

١٢ - إذا كان $X' A Y$ شكلا ثنائى الخطية حقيقيا وغير شاذ فإننا نسمى $X' A^{-1} Y$ بأنها صيغة ثنائى الخطية العكسية . برهن أنه إذا تحولت صيغتان ثنائيتا الخطية عكسيان بشكل مخالف التغير بواسطة تحويل متعامد واحد ، فإنه ينتج عن ذلك شكلا ثنائيا الخطية عكسيان .

١٣ - استخدم المسألة ٤ من الفصل ١٥ لى تهرن أنه يوجد تحويل موافق التغير $X = P U$, $Y = P V$ يحول شكلا ثنائى الخطية ومتناوبا رتبته $r = 2$ إلى الشكل القانوني .

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_3 v_4 - u_4 v_3 + \dots + u_{2t-1} v_{2t} - u_{2t} v_{2t-1}$$

١٤ - عين شكلا قانونيا لشكل ثنائى الخطية متناوب هرميتى وهرميتى .

إرشاد : أنظر (15.6) و (15.7)

الفصل السابع عشر

الصيغ التربيعية (الأشكال التربيعية)

يسمى كثير الحدود المتجانس من النوع

$$q = XAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (17.1)$$

والذي تكون معاملاته a_{ij} عناصر من F ، صيغة تربيعية على F في المجاهيل x_1, x_2, \dots, x_n

مثال ١ :

إن $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ صيغة تربيعية للمتغيرات x_1, x_2, x_3 يمكن كتابة مصفوفة هذه الصيغة بطرق مختلفة معتمدة على الطريقة التي توزع بموجبها حواصل ضرب الحدود التقاطعية (التصالية) $-4x_1x_2$ و $8x_1x_3$ لتكوين الحدود $a_{13}x_1x_3, a_{31}x_3x_1, a_{12}x_1x_2, a_{21}x_2x_1$ ، ستفق على أن مصفوفة الصيغة التربيعية هي مصفوفة متماثلة ، وسنوزع حلود حواصل ضرب التقاطعية بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$ وعلى ذلك :

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X \end{aligned}$$

تسمى المصفوفة المتماثلة $A = [a_{ij}]$ ، مصفوفة الشكل التربيعي (الصيغة التربيعية) وتسمى رتبة A رتبة هذا الشكل . إذا كانت الرتبة r بحيث تكون $n > r$ فإن الشكل يدعى شاذاً وفي الحالة المماكة يدعى غير شاذ

التحويلات :

إن التحويل الخطي $X = BY$ يحول الشكل التربيعي (17.1) ذا المصفوفة المتماثلة A على F إلى الشكل التربيعي

$$(BY)'A(BY) = Y'(BAB)Y \quad (17.2)$$

ذى المصفوفة المتماثلة $B'AB$

توصف صيغتان تربيعيتان في نفس مجموعة المتغيرات x_1, x_2, \dots, x_n بأنهما متكافئتان فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطي غير شاذ $X = BY$ الذى بالإضافة إلى $X = IY$ ، يحول إحدى هاتين الصيغتين إلى الصيغة الأخرى . بما أن $B'AB$ متطابق مع A ، فإنه يكون :

- I. إن رتبة صيغة تربيعية تبقى ثابتة بعد إجراء تحويل غير شاذ للمتغيرات .
- II. يكون شكلان تربيعيان على F متكافئين على F فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتهما متطابقتين على F .

ينتج عن المسألة ١ من الفصل ١٥ أن صيغة تربيعية ربتها r يمكن أن تختزل للشكل

$$h_1 y_1^2 + h_2 y_2^2 + \dots + h_r y_r^2, \quad h_i \neq 0 \quad (17.3)$$

والتي توجد فيها حدود تربيعية فقط للمتغيرات بتحويل خطى غير شاذ $X = B Y$.
 • يجدر بنا أن نذكر أن المصفوفة B هي حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية بينما B' هي حاصل الضرب بترتيب معاكس ،
 لنفس مصفوفات الصفوف الأولية .

مثال ٢ :

$$(17.3) \quad \text{اختزل } q = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X \text{ الوارد في المثال ١ إلى الشكل}$$

$$[A \ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ لدينا :}$$

$$\xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right] = [D \ B']$$

$$q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2 \quad \text{بحول } q \text{ إلى} \quad X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y \quad \text{وهكذا نجد أن}$$

أنظر المسألين ١ - ٢

طريقة لاجرانج للاختزال :

يمكن تحقيق الإنتقال من شكل تربيعي إلى الشكل (17.3) بطريقة تعرف بطريقة لاجرانج وهي تقوم بشكل أساسي ،
 على تكرار عملية الإتمام إلى مربع كامل .

مثال ٣ :

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3) - 23x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \\ &\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{array} \right. \text{ أو } \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{array} \right. \text{ وهكذا نجد أن} \end{aligned}$$

$$\text{فد حول } q \text{ إلى } y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$$

أنظر المسألة ٣

الصيغ التربيعية الحقيقية :

نفرض الشكل التربيعي $q = X^T A X$ اختزل بواسطة تحويل حقيقى غير شاذ إلى الشكل (17.3) . إذا كان واحد أو أكثر من h_i سالباً ، فإنه يوجد تحويل غير شاذ $X = CZ$ ، حيث تنتج C عن B بمتتالية من تحويلات الصفوف والأعمدة من النوع ١ ، الذى يحول q إلى :

$$s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \dots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - \dots - s_r z_r^2 \quad (17.4)$$

والتي فيها تسبق الحدود ذات المعاملات الموجبة الحدود ذات المعاملات السالبة .
والآن التحويل غير الشاذ :

$$w_i = \sqrt{s_i} z_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$w_j = z_j, \quad (j = r+1, r+2, \dots, n)$$

$$Z = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{s_r}}, 1, 1, \dots, 1 \right) W \quad \text{أو}$$

يحول (17.4) إلى الصيغة القانونية .

$$w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \dots - w_r^2 \quad (17.5)$$

وحيث أن حاصل ضرب تحويلات غير شاذة هو تحويل غير شاذ ، فإنه يكون :

III . يمكن اختزال كل صيغة تربيعية حقيقية بواسطة تحويل حقيقى غير شاذ إلى الصيغة القانونية (17.5) حيث تسمى p ، عدد الحدود الموجبة ، دليل الصيغة التربيعية المفروض و r رتبها .

مثال ٤ :

في المثال ٢ - الصيغة التربيعية $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ حلت إلى $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

إن التحويل غير الشاذ $q'' = z_1^2 + 9z_2^2 - 2z_3^2$ يحول q' إلى q'' ، $y_1 = z_1, y_2 = z_3, y_3 = z_2$ ، وإن التحويل غير الشاذ

$$q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 \quad \text{يحول } q'' \text{ إلى } q''' \quad z_1 = w_1, z_2 = w_2/3, z_3 = w_3/\sqrt{2}$$

بتجميع التحويلات فإننا نجد أن التحويل الخطى غير الشاذ

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4/3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} W \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x_1 &= w_1 + \frac{4}{3}w_2 + \sqrt{2}w_3 \\ x_2 &= \frac{4}{3}w_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}w_3 \\ x_3 &= \frac{1}{3}w_3 \end{aligned}$$

يحول q إلى $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$. إن الصيغة التربيعية الناتجة من الرتبة ٣ والدليل ٢ .

قانون سيلفستر للقصور :

سنبرهن في المسألة ه قانون القصور :

IV . إذا اختزل شكل تربيعى حقيقى بواسطة تحويلين غير شاذين إلى الصيغ القانونية (15.2) فإن هذين التحويلين يكون

لها نفس الرتبة والدليل .

وهكذا فإن دليل مصفوفة متائلة حقيقية يعتمد على المصفوفة وليس على التحويلات الأولية التي تنتج (15.2) .

إن الفرق بين عدد الحدود الموجبة وعدد الحدود السالبة $p - (r - p)$ في (17.5) يدعى شارة الشكل التربيعي . كنتيجة للنظرية IV نجد :

V. يكون شكلان تربيعيان كل في n من المتغيرات متكافئين على حقل الأعداد الحقيقية ، إذا كانا (وإذا كانا فقط) من رتبة واحدة ودليل واحد أو من رتبة واحدة وشارة واحدة .

الصيغ التربيعية المركبة :

بفرض أن الشكل التربيعي المركب X^*AX يمكن اختزاله بتحويل غير شاذ إلى الشكل (17.3) . إن من الواضح أن التحويل غير الشاذ :

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{h_i} y_i, & (i = 1, 2, \dots, r) \\ z_j &= y_j, & (j = r+1, r+2, \dots, n) \end{aligned}$$

أو

$$Y = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}, \frac{1}{\sqrt{h_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{h_r}}, 1, 1, \dots, 1 \right) Z$$

يحول (17.3) إلى

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2 \quad (17.6)$$

أى :

VI. يمكن اختزال كل شكل تربيعي على حقل الأعداد المركبة رتبته r بواسطة تحويل غير شاذ على حقل الأعداد المركبة إلى الشكل القانوني (17.6) .

VII. تكون صيغتان تربيعيتان مركبتان كل في n من المتغيرات . متكافئتين على الحقل المركب فيما إذا كانا (وإذا كانا فقط) من رتبة واحدة .

الصيغ (الأشكال) المحددة والصيغ (الأشكال) شبه المحددة :

نقول عن شكل تربيعي ، حقيقى غير شاذ $q = X^*AX$ حيث $|A| \neq 0$ في n من المتغيرات ، إنه محدد موجب فيما إذا كانت رتبته ودليله متساويين . وهكذا فإنه ، في حقل الأعداد الحقيقية ، يمكن اختزال شكل تربيعي محدد موجب إلى الشكل $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ ويكون $q > 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة لمجموعة المتغيرات x .

يسمى الشكل التربيعي الحقيقى الشاذ $q = X^*AX$ حيث $|A| = 0$ ، شكلاً شبه محدد موجب فيما إذا كانت رتبته ودليله متساويين . أى إذا كان $p = r$ حيث $r > n$ ، وهكذا فإنه ، في الحقل الحقيقى يمكن اختزال شكل تربيعي شبه محدد موجب إلى الشكل $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2$ ، حيث $n > r$ ، ويكون $0 \leq q$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

نقول عن شكل تربيعي حقيقى غير شاذ $q = X^*AX$ إنه محدد سالب فيما إذا كان دليله $p = 0$ أى إذا كان $p = 0, n = r$. وهكذا فإنه ، في الحقل الحقيقى ، يمكن اختزال شكل تربيعي محدد سالب إلى الشكل $-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2$ ، ويكون $q < 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

نقول عن شكل تربيعي حقيقى شاذ $q = X^*AX$ ، إنه شبه محدد سالب ، فيما إذا كان دليله $p = 0$ ، أى إذا كان $p = 0, n > r$. وهكذا فإنه في الحقل الحقيقى ، يمكن اختزال شكل تربيعي شبه محدد سالب ، إلى الشكل $-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_r^2$ ، ويكون $q \geq 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

إن من الواضح أنه إذا كان q محددًا (شبه محدد) سالبًا ، فإن $q -$ يكون محددًا (شبه محدد) موجبًا .
يكون للشكل التربيعي المحدد الموجب :

VIII. إذا كان $q = X'AX$ محددًا موجبًا فإن $|A| > 0$.

المصفوفات الرئيسية :

نقول عن مصفر للمصفوفة A إنه رئيسي فيما إذا حصلنا عليه بحذف بعض صفوف A والأعمدة ذات الأرقام المماثلة .
وهكذا فإن العناصر القطرية لمصفر رئيسي للمصفوفة A هي عناصر قطرية في A .

سنبرهن في المسألة ٦ :

IX. إن لكل مصفوفة متماثلة مرتبتها r ، على الأقل ، مصفر رئيسي واحد من الدرجة r لا يساوى الصفر .

المصفوفات المحددة وشبه المحددة :

تسمى المصفوفة A لصيغة تربيعية حقيقية $q = X'AX$ مصفوفة محددة أو شبه محددة إذا كان هذا الشكل التربيعي محددًا أو شبه محدد ويكون :

X. تكون المصفوفة الحقيقية المتماثلة A محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد مصفوفة غير شاذة C بحيث تحقق العلاقة $A = C'C$.

XI. تكون المصفوفة الحقيقية المتماثلة A ذات الرتبة r شبه محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كانت فقط) توجد مصفوفة C من الرتبة r وبحيث تحقق العلاقة $A = C'C$.

أنظر المسألة ٧ .

XII. إذا كانت A محددة موجبة ، فإن كل مصفر رئيسي لـ A موجب .

أنظر المسألة ٨ .

XIII. إذا كانت A شبه محددة موجبة ، فإن كل مصفر رئيسي لـ A يكون غير سالب .

الصيغ التربيعية المنتظمة :

نعرف لمصفوفة متماثلة $A = [a_{ij}]$ على F . المصفوفات الرئيسية المتقدمة ، كما يلي :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad p_n = |A| \quad (17.7)$$

سنبرهن في المسألة ٩ :

XIV. يمكن إعادة ترتيب أي مصفوفة A مربعة من الدرجة n غير شاذة بالمبادلة بين صفوف معينة والمبادلة بين الأعمدة

المنظرة بحيث لا يكون p_{n-1} و p_{n-2} صفريين معًا .

XV. إذا كانت A مصفوفة متماثلة وكان $p_{n-2}p_n \neq 0$ و $p_{n-1} = 0$ فإن p_n و p_{n-2} يكون لهما إشارتان متضادتان .

مثال ٥ :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = |A| = 1. \quad \text{نجد أن} \quad X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} X. \quad \text{للصيغة التربيعية}$$

إن هنا $\alpha_{33} \neq 0$ إن التحويل $X = K_{34} \tilde{X}$ يؤدي إلى الشكل :

$$\tilde{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tilde{X} \quad (i)$$

والذي يكون له $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = -1, p_4 = 1$ وهكذا فإنه في (i) لا يكون كل من p_2 و p_3 مساويين للصفر معا .
 نقول عن مصفوفة ممتثلة 4 رتبها r إنها مصفوفة مرتبة بانتظام فيما إذا لم يكن حدان متتاليان p من المتوالية p_0, p_1, \dots, p_r صفريين . عندما تكون A مرتبة بانتظام ، فإننا نقول إن الشكل التربيعي $X^T A X$ منتظم . إن الشكل معطى في المثال د غير منتظم . وإن الشكل التربيعي (i) الوارد في هذا المثال منتظم .
 لتكن A مصفوفة ممتثلة من الرتبة r . من النظرية IX ، نحوى A على الأقل مصغراً رئيسياً مربعاً M من الدرجة r عبر متلاشي والذي يمكن وضع عناصره في الزاوية العليا اليسرى من A . وهكذا فإن $p_r \neq 0$ بينما $p_{r+1} = p_{r+2} = \dots = p_n = 0$.
 من النظرية XVI يمكن إعادة ترتيب r صفاً الأول و r عموداً الأول بحيث يكون واحداً على الأقل من p_{r-2} و p_{r-1} غير مساوٍ للصفر . إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ و $p_{r-2} = 0$ فإننا نطبق الطريقة السابقة على مصفوفة p_{r-1} ، إذا كان $p_{r-2} \neq 0$ فإننا نطبق هذه الطريقة على مصفوفة p_{r-2} وهكذا إلى أن يصبح M مرتباً بانتظام . وعلى ذلك .
 XVI . أى مصفوفة ممتثلة (صيغة تربيعية) رتبها r يمكن ترتيبها بانتظام .

أنظر المسألة ١٠

XVII . يكون الشكل التربيعي الحقيقي $X^T A X$ محمداً موجباً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبة n وكانت جميع مصفوفاته الرئيسية المتقدمة موجبة .

XVIII . يكون الشكل التربيعي $X^T A X$ ذو الرتبة r شبه محدد موجباً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) كل من المصفوفات الرئيسية p_0, p_1, \dots, p_r موجبة .

طريقة كرونكر للاختزال :

إن طريقة كرونكر لإختزال شكل تربيعي إلى شكل تربيعي آخر لا تظهر فيه إلا الحدود المربعة ، تقوم على ما يأتي :

XIX . إذا كان $X^T A X$ شكلاً تربيعياً على F في n متغيراً من الرتبة r فإنه يمكن تطبيق تحويل خطي غير شاذ F على F ، نحوله إلى الشكل $q^T = \tilde{X}^T B \tilde{X}$ بحيث يقع في الزاوية اليسرى العلوية B مصغراً C من A ، ذو r صفاً وغير شاذ . علاوة على ذلك يوجد تحويل خطي على F ، غير شاذ يحتزل q إلى $q'' = \tilde{X}^T C \tilde{X}$ وهو شكل تربيعي غير شاذ في r متغيراً .

XX . إذا كان $X^T A X$ شكلاً تربيعياً على F في n متغيراً وغير شاذ وإذا كان $\alpha_{nn} \neq 0$ فإن التحويل الخطي غير الشاذ :

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ x_n = \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

أو

$$X = B Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} Y$$

بحول q إلى $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_i y_j + p_{n-1} p_n y_n^2$ حيث عزل حد مربع واحد من بين المتغيرات .

مثال ٦ : الشكل التربيعي $X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X$ نجد $p_2 = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

إن التحويل الخطي غير الشاذ :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{13} y_3 = y_1 - 8y_3 \\ x_2 = y_2 + \alpha_{23} y_3 = y_2 - 8y_3 \\ x_3 = \alpha_{33} y_3 = -2y_3 \end{cases}$$

يختزل $X'AX$ إلى :

$$Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} Y$$

الذي يظهر فيه المتغير y_3 بشكل مربع فقط .

XXI. إذا كان $q = X'AX$ شكلا تربيعياً غير شاذ على F وكان $\alpha_{n-1, n-1} = \alpha_{nn} = 0$ بيما $\alpha_{n, n-1} \neq 0$ فإن التحويل غير الشاذ على F :

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{i, n-1} y_{n-1} + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1, n} y_n, & x_n = \alpha_{n, n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

أو

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1, n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2, n-1} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-2, n-1} & \alpha_{n-2, n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{n-1, n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n, n-1} & 0 \end{bmatrix} Y$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} y_i y_j + 2\alpha_{n, n-1} p_n y_{n-1} y_n.$$

بحول q إلى

إن التحويل الإضافي :

$$\begin{cases} y_i = z_i, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ y_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ y_n = z_{n-1} + z_n \end{cases}$$

يؤدي إلى $\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} z_i z_j + 2\alpha_{n-1} p_n (z_{n-1}^2 - z_n^2)$ حيث عزل حدان تربيعيان لهما إشارتين مختلفتين .

مثال ٧ : للشكل التربيعي :

$$X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} X$$

يكون $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ بينما $\alpha_{32} = -1 \neq 0$. إن التحويل غير الشاذ

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y \quad , \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = \alpha_{32}y_2 \end{cases}$$

يختزل $X'AX$ إلى الشكل :

$$Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y = Y'BY = y_1^2 + 2y_2y_3$$

وإن التحويل :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z \quad , \quad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \end{cases}$$

يحول $Y'BY$ إلى الشكل

$$Z' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z = Z' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2$$

اعتبر الآن شكلاً تربيعياً في n متغيراً رتبته r . من النظرية XIX يمكن اختزال q إلى $q_1 = X'AX$ حيث يكون لـ A مصغر مربع من الدرجة r غير شاذ وواقع في الزاوية اليسرى والعلوية بينما تكون بقية العناصر أصفاراً . واستناداً إلى النظرية XVI يمكن ترتيب A بشكل نظامي .

إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ فإنه يمكن إستعمال النظرية XX لعزل حد مربع واحد :

$$p_{r-1} p_r y_r^2 \quad (17.8)$$

إذا كان $p_{r-1} = 0$ بينما $\alpha_{r-1, r-1} \neq 0$ فإن المبادلة بين الصفين الأخيرين ثم بين العمودين الأخيرين يؤدي إلى مصفوفة يكون فيها بالترتيب الجديد $p_{r-1} = \alpha_{r-1, r-1} \neq 0$. بما أن $p_{r-2} \neq 0$ فإنه يمكن

استخدام النظرية XX مرتين لعزل حدين مربعين

$$p_{r-2} \alpha_{r-1, r-1} y_{r-1}^2 + \alpha_{r-1, r-1} p_r y_r^2 \quad (17.9)$$

والذى تكون إشاراتها متضاد تان وذلك لأن إشارة p_{r-2} هى عكس إشارة p_r وذلك وفقاً للنظرية X V .

إذا كان $p_{r-1} = 0$ و $\alpha_{r-1} = 0$ فإن (أنظر المسألة ٩) $\alpha_{r-1} \neq 0$ ويمكن إستعمال النظرية

XXI لعزل حدين مربعين :

$$2\alpha_{r-1}p_r(y_{r-1}^2 - y_r^2) \quad (17.10)$$

لها إشارتان مختلفتان .

يمكن تكرار هذه الطريقة حتى يختزل الشكل التربيعى المعطى إلى شكل تربيعى آخر لا يحوى سوى حدود مربعة للمتغيرات .

يكون الحد الموزول من (17.8) موجباً أو سالباً بحسب ما تكون للمتوالية p_{r-1}, p_r إشارة ثابتة أو تتغيراً فى

الإشارة . من الملاحظ فى (17.9) و (17.10) أن المتوالتين : $p_{r-2}, \alpha_{r-1}, p_r$ و $p_{r-2}, \alpha_{r-1}, p_r$

تحويان ثباتاً واحداً فى الإشارة وتغيراً واحداً فى الإشارة بغض النظر عن إشارة α_{r-1}, p_r و α_{r-1}, p_r .

وعلى ذلك .

XXII إذا اختزل الشكل التربيعى $q = X^T A X$ المنتظم ذا الرتبة r إلى شكل تربيعى قانونى بطريقة كرونكر

فإن عدد الحدود الموجبة يساوى تماماً عدد الحالات التى تبقى فيها الإشارة ثابتة فى المتوالية $p_0, p_1, p_2, \dots, p_r$

وأن عدد الحدود السالبة يساوى تماماً عدد الحالات التى تتغير فيها الإشارة ، فى هذه المتوالية . ويمكن حساب الصفر فى المتوالية إما حداً موجباً أو حداً سالباً ولكنه يجب أن يحسب .

أنظر المسائل ١١ - ١٣

الشكل التربيعى القابل للتحليل الى عوامل : لنكن $X^T A X \neq 0$ ذات المعاملات المركبة هى الصيغة التربيعية المعطية .

لفرض أن $X^T A X$ قد حلل لموامل من الشكل

$$X^T A X = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n) \quad (i)$$

إذا كانت الموامل مستقلة خطياً فإنه يوجد على الأقل مصفوفة من الشكل $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ غير شاذة . لفرض

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{الشكل} \quad \begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$$

أنه أعيد ترقيم المتغيرات ومعاملاتها بحيث نأخذ

إن التحويل غير الشاذ :

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \\ y_3 = x_3, \dots, y_n = x_n \end{cases}$$

يحول (i) إلى $y_1 y_2$ ذات الرتبة 2 . إذن (i) تكون من الرتبة 2 أيضاً .

إذا كانت الموامل مرتبطة خطياً أى يوجد على الأقل عنصر $a_i \neq 0$. لفرض أنه أعيد ترقيم المتغيرات ومعاملاتها

بحيث يأخذ a_i موضع a_1 . إن التحويل غير الشاذ

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \\ y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n \end{cases}$$

يحول (i) إلى $\frac{b_1}{a_1} y_1^2$ ذات الرتبة 1 . أى أن (i) من الرتبة 1 أيضاً .

على المكس إذا كان $X'AX$ من الرتبة 1 أو 2 فإنه يمكن اختزاله على التوالى بالنظرية VI إلى y_1^2 أو $y_1^2 + y_2^2$ ويمكن كتابة كل من هذين الشكلين ، فى الحقل المركب ، كحاصل ضرب عاملين خطيين .
ونكون بهذا قد برهننا :

XXIII. يمكن وضع شكل تربيعى ذى عوامل مركبة $0 \neq X'AX$ بشكل حاصل ضرب معاملين خطيين فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبته $r \geq 2$.

مسائل محلولة

$$1 - \text{اختزل } q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix} X \quad \text{إلى الشكل (17.3)}$$

من المثال ١ - الفصل ١٥ ،

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [D|P']$$

$$\text{وهكذا فإن التحويل } X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y \quad \text{يختزل } q \text{ إلى الشكل المطلوب } y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2.$$

$$2 - \text{اختزل } q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X \quad \text{لصيغة (17.3)}$$

نجد :

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] = [D|P']$$

$$\text{وهكذا فإن التحويل } X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y \quad \text{يختزل } q \text{ إلى } y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2.$$

٣ - اختزال لاجرانج .

(١)

$$\begin{aligned} q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)\} + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4) + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2\} \\ &\quad + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3\{x_2^2 + 2x_2(x_3 + 4x_4)\} + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3 - 2x_4)^2 \end{aligned}$$

$$2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2 \quad \text{يختزل } q \quad \text{إلى} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \quad \text{وهكذا فإن التحويل}$$

(ب) الشكل التربيعي للمسألة ٢ نجد ،

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$$

بما أن الشكل الأخير لا يحوى حدوداً في x_2^2 أو x_3^2 بل يحوى حداً في x_2x_3 فإننا نستعمل التحويل غير الشاذ :

$$(i) \quad x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_2 + z_3$$

للمحول عل :

$$q = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8z_2z_3 = (z_1 + 4z_2 + 2z_3)^2 + 8(z_2 + \frac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2 = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X. \quad \text{وهكذا ،} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X \quad (i) \quad \text{ومن} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z \quad \text{والآن}$$

$$\text{أى أن التحويل غير الشاذ} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y \quad \text{يقوم بالاختزال المطلوب .}$$

٤ - باستخدام نتيجة المسألة ٢ حصل على

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

و بتطبيق التحويلين $H_2(\frac{1}{4}\sqrt{2}), K_2(\frac{1}{4}\sqrt{2})$ ، و $H_3(\frac{1}{2}\sqrt{2}), K_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$ ، نحصل على :

$$[A|I] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array} \right] = [C|Q']$$

$$q = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X \quad \text{يختزل ،} \quad X = QY = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix} Y \quad \text{وهكذا فإن التحويل}$$

إلى الشكل القانوني $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

• - برهن أنه إذا تحول شكل تربيعي حقيق q بواسطة تحويلين غير شاذين إلى شكلين متميزين مثل :

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \dots - y_r^2 \quad (i)$$

و

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \dots - y_r^2 \quad (ii)$$

فان $p = q$.

II وبذلك يحول التحويلان :
 لنفرض أن $p < q$ وليكن $X = F Y$ التحويل الذى يؤدى إلى (i) و $X = G Y$ التحويل الذى يؤدى إلى

$$Y = F^{-1}X = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

[illegible]

على الترتيب 1 و (ii) إلى q . وهكذا نجد :

$$\begin{aligned}
 & (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n)^2 + \dots + (b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \dots + b_{pn}x_n)^2 \\
 & - (b_{p+1,1}x_1 + b_{p+1,2}x_2 + \dots + b_{p+1,n}x_n)^2 - \dots - (b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \dots + b_{rn}x_n)^2 \\
 = & (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n)^2 + \dots + (c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + c_{qn}x_n)^2 \\
 & - (c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \dots + c_{q+1,n}x_n)^2 - \dots - (c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \dots + c_{rn}x_n)^2
 \end{aligned}
 \tag{iii}$$

اعتبر $r \geq r - q + p$ معادلة :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \dots + b_{pn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \dots + c_{q+1,n}x_n = 0 \\ c_{q+2,1}x_1 + c_{q+2,2}x_2 + \dots + c_{q+2,n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \dots + c_{rn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

نستنتج من النظرية IV الفصل ١٠ إن هذه المجموعة حلا غير ناه وليكن (a_1, a_2, \dots, a_n) مثلا . إذا عوضنا هذا الحل في (iii) فالتنا نجد :

$$\begin{aligned} & (b_{p+1,1}\alpha_1 + b_{p+1,2}\alpha_2 + \dots + b_{p+1,n}\alpha_n)^2 - \dots - (b_{r1}\alpha_1 + b_{r2}\alpha_2 + \dots + b_{rn}\alpha_n)^2 \\ &= (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1n}\alpha_n)^2 + \dots + (c_{q1}\alpha_1 + c_{q2}\alpha_2 + \dots + c_{qn}\alpha_n)^2 \end{aligned}$$

إن من الواضح أن هذا يتطلب أن كل الحدود المربعة مساوية للصفر ولكن لا F ولا G غير شاذ على النقيض لما هو مفروض. على ذلك $p \geq q$. وإذا أعدنا هذا البرهان لحاله $p > q$ فسوف نتوصل إلى تناقض آخر أى أنه يجب أن يكون $p = q$.

٦ - برهن أنه يوجد على الأقل ، لكل مصفوفة مربعة A من الرتبة r ، مصفر رئيسي من الدرجة r لا يساوى الصفر .
 بما أن A من الرتبة r فإن لها ، على الأقل مصفر مربع من الدرجة r لا يساوى الصفر . لنفرض أن هذا المصفر واقع في الصفوف ذات الأرقام i_1, i_2, \dots, i_r ولنفرض أننا نقلنا هذه الصفوف بحيث تحتل مواقع $1, 2, \dots, r$ صفاً

الأول المصفوفة ولنفرض أيضاً ، أننا نقلنا الأعمدة ذات الأرقام i_1, i_2, \dots, i_r بحيث تحتل مواقع الـ r عموداً الأول .
والآن إن الصفوف الـ r الأولى مستقلة خطياً بينما كل الصفوف الأخرى تراكيب خطية لها . فإذا أخذنا تراكيب خطية مناسبة للصفوف الـ r الأولى المذكورة وأضفنا هذه التراكيب إلى الصفوف الـ $(n-r)$ الباقية فإنه يمكن جعل هذه الصفوف أصفاراً . بما أن A مصفوفة متماثلة فإن عمليات مماثلة على الأعمدة تجعل الأعمدة الـ $(n-r)$ الأخيرة أصفاراً ، وهكذا نجد :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_r} & 0 \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_r} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} & \dots & a_{i_r i_r} & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right]$$

حيث يقع مصفر غير متلاشى في الزاوية اليسرى العلوية من المصفوفة . ومن الواضح أن هذا المصفر مصفر رئيسي لـ A .
٧ - برهن أن مصفوفة حقيقية متماثلة A ذات رتبة r تكون شبه محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) توجد مصفوفة C من الرتبة r بحيث يكون $A = C^T C$.

بما أن A من الرتبة r فإن شكلها القانوني هو $N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. أي توجد مصفوفة غير شاذة B بحيث يكون $A = B^T N_1 B = B^T N_1 N_1 B = B^T N_1' \cdot N_1 B$. فإنه يكون $N_1' = N_1 = N_1^2$. لنفرض $C = N_1 B$ فتكون C من الرتبة r و $A = C^T C$ كما هو مطلوب .

على العكس لنفرض أن C هي مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n والرتبة r فإن رتبة المصفوفة $A = C^T C$ هي s حيث $r \geq s$. لنفرض أن شكلها القانوني هو :

$$N_2 = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_s, 0, 0, \dots, 0)$$

حيث كل d_i أما أن يساوى 1 أو -1 . أي أنه توجد مصفوفة حقيقية غير شاذة E بحيث يكون $E^T(C^T C)E = N_2$. لنفرض $CE = B = [b_{ij}]$. بما أن $B^T B = N_2$ فإننا نجد :

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \dots + b_{in}^2 = d_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

و

$$b_{j1}^2 + b_{j2}^2 + \dots + b_{jn}^2 = 0, \quad (j = s+1, s+2, \dots, n)$$

إن من الواضح أن كل $d_i > 0$ وأن A شبه محددة موجبة .

٨ - برهن أنه إذا كانت A محددة موجبة فإن كل مصفر رئيسي لـ A يكون موجباً .

لنفرض $q = X^T A X$. إن المصفر الرئيسي لـ A الناتج عن حذف الصف والعمود اللذين رقمهما i هو المصفوفة A_i للشكل التربيعي q_1 الذي ينتج عن q بوضع $x_i = 0$. والآن كل قيمة لـ q_i ، لمجموعة غير تافهة من القيم المعطاة لمتغيراته ، هي قيمة أيضاً لـ q وعلى ذلك فهي موجبة . أي أن A_i محدد موجب .

يمكن تكرار هذا البرهان للمصفرات الرئيسية A_{ij}, A_{ijk}, \dots الناتجة عن A بعد حذف اثنين ، ثلاثة ، ... من صفوف A ونفس الأعمدة .

من النظرية VI يكون $A_i > 0, A_{ij} > 0, \dots$ أي أن كل مصفر رئيسي موجب

٩ - برهن أنه يمكن إعادة ترتيب كل مصفوفة مربعة غير شاذة ومن الدرجة n ، $A = [a_{ij}]$ بالمبادلة بين صفوف معينة منها والمبادلة بين الأعمدة المناظرة بحيث لا يكون p_{n-1} و p_{n-2} معدومين معاً .

إن من الواضح أن هذه النظرية صحيحة لمصفوفة A من الدرجة 1 أو من الدرجة 2 وعلاوة على ذلك ، فإنها صحيحة لمصفوفة A درجتها $n < 2$ عندما يكون $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$. لنفرض أن $\alpha_{nn} = 0$ ؛ فيكون إما (أ) بعض $\alpha_{ii} \neq 0$ لا يساوى الصفر وإما (ب) كل $\alpha_{ii} = 0$.

لنفرض (أ) بعض $\alpha_{ii} \neq 0$ فإذا نقلنا الصف ذا الرقم i والعمود ذا الرقم i إلى موقعى الصف والعمود الأخيرين فإنه يكون للمصفوفة الجديدة $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$.

لنفرض الآن (ب) كل $\alpha_{ii} = 0$. بما أن $|A| \neq 0$ فإن واحداً على الأقل من $\alpha_{ni} \neq 0$. لننقل الصف ذا الرقم i إلى موضع الصف ذي الرقم $(n-1)$ والعمود ذا الرقم i إلى موضع العمود ذا الرقم $(n-1)$. فيكون في المصفوفة الجديدة $\alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n-1} \neq 0$. استناداً إلى (6.6) نجد :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1,n}^2 = p_{n-2}p_n$$

و $p_{n-2} \neq 0$.

لاحظ أن هذا يبرهن النظرية XV أيضاً .

$$10 - \text{ أعد ترقيم المتغيرات بحيث يصبح } q = XAX = X' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \text{ منتظماً .}$$

نجد هنا أن $p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = -4, p_4 = -3$ ، ربما أن $p_1 = p_2 = 0, p_3 \neq 0$.

فإننا ندرس المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ لـ p_3 . إن المعامل المرافق ، $B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ ؛ وإن المبادلة بين

الصف الثاني والثالث ثم بين العمود الثاني والثالث من A يعطينا :

$$\bar{X} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

حيث يكون $p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = -4, p_3 = -4, p_4 = -3$ ، هنا ، x_2 قد رقت x_3 و x_3 قد رقت x_2

$$11 - \text{ اختزل بطريقة كرونكر } q = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} X .$$

نجد هنا أن $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = -3, p_3 = 20, p_4 = -5$ وأن q منتظم . إن متوالية p تحوى ثباتاً واحداً وثلاثة تغيرات في الإشارة وإن الشكل المختزل يحوى حداً واحداً موجباً وثلاثة حدود سالبة .

بما أن كل $p_i \neq 0$ فإن تكرار استعمال النظرية XIX يؤدي بنا إلى الشكل المختزل

$$p_0 p_1 y_1^2 + p_1 p_2 y_2^2 + p_2 p_3 y_3^2 + p_3 p_4 y_4^2 = y_1^2 - 3y_2^2 - 60y_3^2 - 100y_4^2$$

$$q = X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} X. \quad ١٢ - \text{اختزل بطريقة كرونكر}$$

إن A هنا من الرتبة $3 \neq 0$ وإن مبادلة بين الصفين الأخيرين ثم بين العمودين الأخيرين تحول A إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{حيث } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \neq 0. \text{ بما أن } B \text{ من الرتبة الثالثة فإنه يمكن اختزالها إلى الشكل}$$

$$p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = -1. \text{ ويكون لهذا الشكل } \tilde{X}C\tilde{X} = \tilde{X}' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tilde{X} \text{ قد اختزل إلى الشكل}$$

يجب أن يحوى الشكل المختزل حدين موجبين وحداً واحداً سالباً . بما أن $p_2 = 0$ ، يبين $p_2 = 0$ ، $\gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ ، الشكل المختزل يكون استناداً إلى (16.8)

$$p_0 p_1 y_1^2 + p_1 \gamma_{22} y_2^2 + \gamma_{22} p_3 y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

$$q = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X. \quad ١٣ - \text{اختزل بطريقة كرونكر}$$

نجد هنا : $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = -9, p_4 = 27$ ، وأن الشكل المختزل سيحوى حدين موجبين وحدين سالبين . اعتبر

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة } p_3. \text{ بما أن } \beta_{33} = 0 \text{ يبين } \beta_{32} = -3 \neq 0 \text{ فإن الشكل المختزل يكون بواسطة (16.8) و (16.9) هو :}$$

$$p_0 p_1 y_1^2 + 2\beta_{32} p_3 (y_2^2 - y_3^2) + p_3 p_4 y_4^2 = y_1^2 + 54y_2^2 - 54y_3^2 - 243y_4^2$$

١٤ - برهن أنه لمجموعة من المتجهات الحقيقية ذات n مركبة X_1, X_2, \dots, X_n يكون

$$|G| = \begin{vmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \dots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \dots & X_2 \cdot X_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \dots & X_p \cdot X_p \end{vmatrix} \geq 0$$

حيث تتحقق المساواة إذا كانت (وإذا كانت فقط) هذه المجموعة مرتبطة خطياً .

(أ) لنفرض أن المتجهات X_i مستقلة خطياً ولنفرض $X = [x_1, x_2, \dots, x_p]' \neq 0$. فيكون $Z = \sum_{i=1}^p X_i x_i \neq 0$

$$0 < Z \cdot Z = \left(\sum_{i=1}^p X_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^p X_j x_j \right) = X' (X'_i X_j) X = X' (X_i \cdot X_j) X = X' G X$$

وحيث أن هذا الشكل التربيعي محدد موجب $|G| > 0$.

(ب) لنفرض أن المتجهات X_i مرتبطة خطياً فإنه توجد مقادير عددية k_1, k_2, \dots, k_p ليست كلها أصفاراً بحيث

$$\xi = \sum_{i=1}^p k_i X_i = 0 \quad \text{ينتج عن ذلك ؛}$$

$$X_j \cdot \xi = k_1 X_j \cdot X_1 + k_2 X_j \cdot X_2 + \dots + k_p X_j \cdot X_p = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

وهكذا فإنه يكون لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$X_j \cdot X_1 x_1 + X_j \cdot X_2 x_2 + \dots + X_j \cdot X_p x_p = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

حل غير تافه، $|G| = 0$ ويكون $x_i = k_i$ ، $(i = 1, 2, \dots, p)$.

لقد برهنا أنه $|G| \neq 0$ ولبرهان عكس (ب) علينا فقط أن نفرض أن $|G| = 0$ ونعكس مراحل (ب) لكي نحصل

على $X_j \cdot \xi = 0$ ، $(j = 1, 2, \dots, p)$ حيث $\xi = \sum_{i=1}^p k_i X_i$. وهكذا فإن $\xi = 0$ ، $\xi \cdot \xi = 0$ ، $\sum_{j=1}^p k_j X_j \cdot \xi = 0$ وأن المتجهات المغطاة X_i تكون مرتبطة خطياً.

مسائل إضافية

١٥ - اكتب الأشكال التربيعية التالية في صورة المصفوفات :

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3 \quad (ب) \quad 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2 \quad (أ) \quad x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$\text{الجواب (أ)} \quad X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix} X \quad (ب) \quad X \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$١٦ - \text{اكتب بالتفصيل الشكل التربيعي في المتغيرات } x_1, x_2, x_3 \text{ الذي مصفوفته هي } \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{الجواب : } 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$$

١٧ - اختزل بطريقة المسألة ١ وبطريقة لا جرانج للاختزال :

$$X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (د) \quad X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (ج) \quad X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} X \quad (ب) \quad X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix} X \quad (أ)$$

$$\text{الجواب : (أ)} \quad y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2 \quad (ب) \quad y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 \quad (ج) \quad y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2 \quad (د) \quad y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

$$\text{إرشاد : استخدم في (ج) و (د) } x_1 = z_3, x_2 = z_1, x_3 = z_2.$$

$$١٨ - (أ) برهن أن $X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X$ ولكن المصفوفتين لهما رتبتان مختلفتان.$$

(ب) برهن أن المصفوفة المائلة لشكل تربيعي وحيدة.

$$١٩ - برهن أن $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$ و $9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ متكافئان على الحقل الحقيقي.$$

٢٠ - برهن : تكون مصفوفة حقيقية متماثلة ، محددة موجبة (سالبة) إذا كانت (وإذا كانت فقط) متطابقة مع الحقل الحقيقي لـ I (-) .

٢١ - برهن أنه يمكن اختزال $X'AX$ الوارد في المسألة ١٢ إلى $\tilde{X}'C\tilde{X}$ بواسطة $X = R\tilde{X}$ حيث $R = K_{34} K_{41}(-5)K_{42}(1)$. ومن ثم برهن النظرية XIX .

٢٢ - (١) برهن أنه إذا كان شكلان تربيعيان حقيقيان للمتغيرات نفسها ، موجبان محددان ، فإن الحال يكون كذلك بالنسبة لمجموعهما .

(ب) برهن أنه إذا كان q_1 شكلاً تربيعياً محدداً موجباً و x_1, x_2, \dots, x_5 وكان q_2 شكلاً تربيعياً محدداً موجباً في $x_{5+1}, x_{5+2}, \dots, x_n$ فإن $q = q_1 + q_2$ يكون شكلاً تربيعياً محدداً موجباً في x_1, x_2, \dots, x_n .

٢٣ - برهن أنه إذا كانت C مصفوفة حقيقية غير شاذة فإن $C'C$ تكون محددة موجبة .

إرشاد : اعتبر $X'IX = Y'CICY$.

٢٤ - برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة محددة موجبة A بالشكل $A = C'C$. (إن المسألتين ٢٣ و ٢٤ تبيان برهان النظرية X) .

إرشاد : اعتبر $D'AD = I$.

٢٥ - برهن أنه إذا كانت المصفوفة الحقيقية المتماثلة A ، محددة موجبة فإن A^p تكون كذلك حيث p أى عدد صحيح موجب .

٢٦ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة : محددة موجبة وكانت المصفوفتان C, B محققين للمعادلتين $B'AB = I$ و $A = C'C$ فإن CB تكون مصفوفة متعامدة .

٢٧ - برهن أن كل مصفر رئيسي لمصفوفة شبه محددة موجبة A يكبر أو يساوى الصفر .

٢٨ - برهن أن $ax_1^2 - 2bx_1x_2 + cx_2^2$ محدّد موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $0 < a$ و $|A| = ac - b^2 > 0$.

٢٩ - حقق تأثير التحويلين الواردين في النظريتين XX و XXI .

٣٠ - بعد تغيير ترقيم المتغيرات ، إذا كان ذلك ضرورياً ، حول مايلى ، بواسطة طريقة كرونكر ، للاختزال ، إلى شكل قانونى :

$$X' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (ز) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X \quad (هـ) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X \quad (ح) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X \quad (١)$$

$$X' \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \quad (ح) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X \quad (د) \quad X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} X \quad (د) \quad X' \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} X \quad (ب)$$

إرشاد : في (ز) أعد ترقيم المتغيرات لتحصل على (هـ) وتم أيضاً بما ورد في المسألة ١٧ (د) .

الحساب : (١) $P_0 = P_1 = 1, \alpha_{22} = -1, p_3 = -1; y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ (هـ) $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = 1; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(ب) $P_0 = P_1 = 1, \alpha_{23} = -4, p_3 = -16; y_1^2 + 128y_2^2 - 128y_3^2$ (د) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2$

(ج) $y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_4^2$ (ز) أنظر (هـ)

(د) $y_1^2 - 8y_2^2$ (ح) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2 + 12y_4^2$

٣١ - برهن أنه يمكن تحليل الشكل

إلى حاصل ضرب عوامل $q = x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 - 3x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_1x_4 + 13x_2x_3 - 11x_2x_4 + 9x_3x_4$

الفصل الثامن عشر

الصيغ الهرميتية

ان الشكل (الصيغة) المعروف بـ :

$$h = \bar{X}HX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} \bar{x}_i x_j, \quad \bar{h}_{ij} = h_{ji} \quad (18.1)$$

حيث H مصفوفة هرميتية ومركبات X من حقل الأعداد المركبة ، يدعى شكلاً هرميتية (صيغة هرميتية) . تدعى رتبة H برتبة هذا الشكل . إذا كانت الرتبة r حيث $n > r$ فإن هذا الشكل يدعى شاذاً وفي الحالة المخالفة يدعى غير شاذ .

إذا كان H و X حقيقيين فإن (18.1) يكون شكلاً حقيقياً تربيعياً ، إننا سوف نجد هنا أن النظريات ستكون مشابهة لتلك الواردة في الفصل ١٧ ولكن البراهين ستختلف قليلاً عن تلك الواردة في الفصل المذكور .

بما أن H هرميتية فإن كل h_{ii} حقيقى وأن كل $h_{ij} \bar{x}_i x_j$ حقيقى أيضاً ، وعلاوة على ذلك سيكون لزوج حاصل الضرب التقاطعيين $h_{ij} \bar{x}_j x_i$ ، $h_{ji} \bar{x}_i x_j$ ،

$$h_{ij} \bar{x}_i x_j + h_{ji} \bar{x}_j x_i = h_{ij} \bar{x}_i x_j + \bar{h}_{ij} x_i \bar{x}_j$$

حقيقية . وهكذا نجد :

I إن قيم الشكل الهرميتى حقيقية .

إن التحويل الخطى غير الشاذ $X=BY$ يحول الشكل المبرمى (18.1) إلى شكل هرميتى آخر .

$$(\bar{B}Y)H(BY) = \bar{Y}(\bar{B}'HB)Y \quad (18.2)$$

نقول عن شكلين هرميتيين في نفس مجموعة المتغيرات x_j ، إنهما متكافئان إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطى غير شاذ $X=BY$ يحول بالإضافة إلى $Y=IX$ أحد هذين الشكلين إلى الآخر . بما أن $\bar{B}'HB$ و H مصفوفتان مقترنتان فإنه يكون :

II لاتتغير رتبة شكل هرميتى بتحويل غير شاذ للمتغيرات .

III يكون شكلان هرميتيان متكافئين إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتهما مقترنتين .

الاختزال لشكل قانونى :

يمكن اختزال شكل هرميتى (18.1) رتبته r إلى الشكل القطرى :

$$k_1 \bar{y}_1 y_1 + k_2 \bar{y}_2 y_2 + \dots + k_r \bar{y}_r y_r, \quad \text{حيث } k_i \neq 0 \text{ وحقيقى} \quad (18.3)$$

باستخدام تحويل خطى غير شاذ $X=BY$ يتضح من (18.2) أن B حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية بينا \bar{B}' هى حاصل ضرب ، بترتيب معاكس ، لمصفوفات الصفوف الأولية المرافقة .

باستخدام تحويل خطى آخر ، يمكن تحويل (18.3) إلى الشكل القانونى (أنظر (15.6))

$$\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_p z_p - \bar{z}_{p+1} z_{p+1} - \dots - \bar{z}_r z_r \quad (18.4)$$

الذى دليله p وشارته $p - (r - p)$. وهنا أيضاً ، تعتمد p على الصيغة المعطاة ولا يعتمد على التحويل الذى حول هذا الشكل إلى (18.4) .

IV. يكون شكلان هرميتيان فى نفس مجموعة المجاهيل والى عددها n ، متكافئين ، إذا كان (وإذا كان فقط) لهما الرتبة ذاتها والدليل ذاته أو الرتبة ذاتها ونفس الشارة .

الإشكال المحددة والإشكال شبه المحددة :

يسمى الشكل الهرميتى غير الشاذ $HX = X'$ فى n متغيراً ، شكلاً محدداً موجباً إذا كان كل من رتبته ودليله مساوياً n أى أنه يمكن اختزال شكل هرميتى محدد موجب إلى الشكل $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \dots + \bar{y}_n y_n$ ويكون $0 < h$ لأى مجموعة غير تافهة من قيم المتغيرات x .

نقول عن شكل هرميتى شاذ $H = \bar{X}' H X$ إنه شبه محدد موجب إذا كانت رتبته مساوية لدليله أى $r = p$ حيث $n > p$. أى أن يمكن تحويل شكل هرميتى شبه محدد موجب إلى $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \dots + \bar{y}_r y_r$ ، $r < n$ ، وأن $0 \leq h$ لأى مجموعة غير تافهة من قيم المتغيرات x .

تدعى المصفوفة H للشكل الهرميتى $\bar{X}' H X$ ، مصفوفة محددة موجبة أو مصفوفة شبه محددة موجبة ، حسبما يكون هذا الشكل محدداً موجباً أو شبه محدد موجب .

V. يكون الشكل الهرميتى محدداً موجباً إذا كان (وإذا كان فقط) توجد مصفوفة غير شاذة C بحيث يكون $H = \bar{C}' C$.

VI. إذا كانت H محددة موجبة فإن كل مصفر رئيسى لـ H موجب والعكس صحيح .

VII. إذا كانت H شبه محددة موجبة فإن كل مصفر رئيسى لـ H يكون غير سالب والعكس صحيح .

مسائل محلولة

$$1. - \text{اختزل } \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix} X \text{ إلى شكل قانونى (18.4).}$$

من المسألة ٧ من الفصل ١٥

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & -1 & (-4-4i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{array} \right]$$

وهكذا فإن التحويل الخطى غير الشاذ :

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{10} & (-4+4i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -i/\sqrt{10} \\ 0 & -i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y$$

يختزل الشكل الهرميتى المعطى إلى $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 - \bar{y}_3 y_3$.

مسائل إضافية

٢ — اختزل كلا مائلي ، إلى الشكل القانوني :

$$\bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2-3i \\ 1+3i & 1 & 2+3i \\ 2+3i & 2-3i & 4 \end{bmatrix} X \quad (ج) \quad \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix} X \quad (ا)$$

$$\bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 3-2i \\ 1+i & 0 & 2-i \\ 3+2i & 2+i & 4 \end{bmatrix} X \quad (د) \quad \bar{X}' \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} X \quad (ب)$$

إرشاد : في (ب) اضرب أولاً الصف الثاني من H في i ثم أضف الناتج إلى الصف الأول .

الجواب :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 \quad (ا)$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 \quad (ب)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+3i)/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 \quad (ج)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} & (-1+3i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (-3-2i)/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y ; \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2 - \bar{y}_3 y_3 \quad (د)$$

٣ — أوجد التحويل الخطي $X=BY$ الذي ، إذا اتبع به $Y=IX$ ، يحول (ا) من المسألة ٢ إلى (ب) من المسألة نفسها .

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} Y \quad \text{الجواب :}$$

$$4 - \text{بين أن } \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix} X \text{ محدد موجب وأن } \bar{X}' \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3 & 5 \\ 1-2i & 5 & 10 \end{bmatrix} X \text{ شبه محدد موجب .}$$

٥ — برهن النظريات VII—VI

٦ — أوجد للأشكال الهرميتية ، نظريات مشابهة للنظريات XIX — XXI الواردة في الفصل ١٧ والمتعلقة بالأشكال

الترييمية .

$$H = |h_{ij}| \quad \text{حيث } \eta_{ij} \text{ هو المعامل المرافق لـ } h_{ij} \text{ في } H$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \bar{x}_1 & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ \bar{x}_2 & h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n & h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} \bar{x}_i x_j$$

٧ — برهن أن :

إرشاد : استعمل (4.3) .

الفصل التاسع عشر

المعادلة المميزة لمصفوفة

المسألة :

ليكن $Y = AX$ ، حيث $A = [a_{ij}]$ ، $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ ، تحويل خطى على F . على وجه العموم يحول هذا التحويل المتجه $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ إلى المتجه $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ الذى يكون صلته بالمتجه X من خلال هذا التحويل . سنحاول هنا ، النظر فى إمكان وجود بعض المتجهات X التى تتحول بهذا التحويل إلى λX . حيث λ إما أن يكون مقداراً عددياً من F أو من حقل (\mathcal{F}) يكون F حقلاً جزئياً منه .

يسمى أى متجه X ، يتحول وفق هذا التحويل إلى λX أى أن ، أى متجه X يحقق العلاقة :

$$AX = \lambda X \quad (19.1)$$

متجهها لا متغيراً بالنسبة لهذا التحويل .

المعادلة المميزة : من (19.1) يكون لدينا

$$\lambda X - AX = (\lambda I - A)X = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad (19.2)$$

تكون لمجموعة المعادلات المتجانسة (19.2) حلول غير تافهة فيما إذا كانت (وإذا كان فقط) .

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (19.3)$$

إن مفكوك هذه المحددة يعطى كثير حدود $\phi(\lambda)$ من الدرجة n بالنسبة لـ λ والذى يعرف بإسم كثير الحدود المميز للتحويل المفروض أو للمصفوفة A . تدعى المعادلة $\phi(\lambda) = 0$ المعادلة المميزة لـ A وتسمى جذورها $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ الجذور المميزة لـ A . إذا كان $\lambda = \lambda_i$ جذراً مميزاً فإنه يكون للمعادلة (19.2) حلول غير تافهة هى مركبات المتجهات المميزة أو الإمتغيرة المصاحبة المناظرة لهذه القيمة الخاصة (المميزة) . تدعى القيم الخاصة أيضاً ، الجذور الكامنة كما تدعى المتجهات الخاصة ، متجهات كامنة .

مثال ١ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{عين القيم الخاصة والمتجهات اللامتغيرة المرافقة للمصفوفة}$$

إن المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$ القيم المميزة : $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$.

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

إذا كان $\lambda = \lambda_1 = 5$ فإن (19.2) تأخذ الشكل :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

بما أن $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ مكافئ صفى للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

فإن أحد الحلول يعطى بالعلاقة : $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ وهكذا فإنه يرافق القيمة الخاصة (الجذر المميز) $\lambda = 5$ فراغ اتجاهى ذو بعد واحد مولد بالمتجه $[1, 1, 1]$ إن كل متجه $[k, k, k]$ من هذا الفراغ هو متجه لا متغير لـ A .

عندما تكون $\lambda = \lambda_2 = 1$ فإن (19.2) يأخذ الشكل :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

إن $(1, 0, -1)$ و $(2, -1, 0)$ حلان مستقلان خطيا . وهكذا فإن الفراغ المصاحب للقيمة الخاصة $\lambda = 1$ هو الفراغ الاتجاهى الذى بعده هو 2 والمولد بالمتجهين $X_1 = [2, -1, 0]$ و $X_2 = [1, 0, -1]$ إن كل متجه $[2h+k, -h, -k]$ هو متجه لا متغير لـ A .

أنظر المسألتين ١ - ٢

نظريات عامة :

سنبرهن فى المسألة ٣ حالة خاصة ($k = 3$) من

I. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ جذورا خاصة مختلفة (متميزة) للمصفوفة A وإذا كانت X_1, X_2, \dots, X_k متجهات غير صفيرية لا متغيرة مصاحبة على الترتيب لهذه الجذور فإن المتجهات X تكون مستقلة خطيا .

سنبرهن فى المسألة ٤ حالة خاصة ($n = 3$) من

II. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكانت $\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$ فإن مشتقة $\phi(\lambda)$ من المرتبة k بالنسبة إلى λ يساوى $k!$ مرة مجموع المصنفات الرئيسية من الدرجة $(n-k)$ للمصفوفة المميزة إذا كانت $n > k$ ويساوى $n!$ مرة إذا كانت $k = n$ ويساوى الصفر إذا كان $n < k$.

كنتيجة للنظرية II نجد :

III. إذا كانت λ جذرا مميزا مكررا r من المرات للمعادلة المميزة للمصفوفة المربعة A ذات الدرجة n فإن رتبة المصفوفة $\lambda I - A$ لا تقل عن $n-r$ وإن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب لا يزيد عن r .

أنظر المسألة ٥

بصورة خاصة :

III. إذا كان λ_i جذرا بسيطا للمعادلة المميزة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n فإن رتبة $I - A$ تساوى $(n-1)$ وإن سمة الفراغ الاتجاهي للامتغير المصاحب تساوى الواحد .

مثال ٢ :

$$\phi(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \text{حيث } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ الواردة في المثال ١}$$

إن المتجه اللامتغير $[1, 1, 1]$ المصاحب للقيمة الخاصة $\lambda = 5$ وإن المتجهين اللامتغيرين المستقلين خطياً $[2, -1, 0]$ و $[1, 0, -1]$ المصاحبين للجذر المضاعف $\lambda = 1$ تكون مجموعة مستقلة خطياً (أنظر النظرية I).

إن بعد الفراغ الاتجاهي للامتغير ، المصاحب للجذر البسيط المميز $\lambda = 5$ تساوى الواحد وإن بعد الفراغ الاتجاهي للامتغير المصاحب للجذر المميز $\lambda = 1$ المضاعف من القوة 2 يساوى 2 (أنظر النظريتين III و III').

أنظر أيضاً المعادلة رقم ٦

بما أن مصفر رئيسي لـ A يساوى المصفر الرئيسي المقابل من A فإننا نجد استناداً إلى العلاقة (19.4) من المسألة ١ :

IV. إن القيم الخاصة لـ A هي نفسها القيم الخاصة لـ A' .

بما أن أى مصفر رئيسي لـ A هو المرافق للمصفر الرئيسي المناظر من A فإنه يكون .

V. إن الجذور المميزة لكل من A و A' تكون المرافقة للجذور المميزة لـ A .

وإذا قارنا المعادلات المميزة فإننا نجد .

VI. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وإذا كانت k مقدارا عددياً فإن

$k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n$ تكون القيم الخاصة (الجذور المميزة) لـ kA .

VII. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وإذا كان k مقدارا عددياً فإن

$\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \dots, \lambda_n - k$ تكون هي القيم الخاصة لـ $A - kI$.

سنبرهن في المسألة ٧ :

VIII. إذا كانت α جذرا يميز المصفوفة غير شاذة A فإن $|A| / \alpha$ يكون جذرا خاصاً لـ $\text{adj } A$.

مسائل محلولة

١ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \dots + s_{n-1} \lambda + (-1)^n |A| \quad (19.4)$$

حيث $(m = 1, 2, \dots, n-1)$ يمثل $(-1)^m$ من المرات مجموع كل المصفورات الرئيسية ذات الدرجة m للمصفوفة A

لنكتب من جديد $|\lambda I - A|$ بالشكل :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \dots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & 0 - a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث يوضع كل عنصر في هذه المحددة بشكل ثنائي الحد . لنفرض أننا عبرنا عن هذه المحددة بمجموع 2^n من المحددات وفقا للنظرية VIII من الفصل الثالث . يتكون قطر إحدى هذه المحددات من عناصر يساوى كل منها λ بينما تكون بقية عناصر المحددة أصفارا وتساوى قيمة هذه المحددة λ^n . وهناك محددة أخرى خالية من λ قيمتها هي $|A| (-1)^n$. أما بقية المحددات فإن كلا منها يحوى m عمودا حيث $(m = 1, 2, \dots, n-1)$ من $-A$ بينما يحوى كل عمود من الأعمدة الـ $n-m$ الباقية عنصرا وحيدا غير صفري يساوى λ .

اعتبر واحد من هذه المحددات ولنفرض أن أعمدته المرققة بالشكل i_1, i_2, \dots, i_m أعمدة من $-A$.

بعد عدد زوجي من المبادلات (عد ذلك) بين صفين متتالين متجاورين وعمودين متتالين (متجاورين) تأخذ هذه المحددة الشكل .

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{i_1, i_1} & a_{i_1, i_2} & \dots & a_{i_1, i_m} & & & \\ a_{i_2, i_1} & a_{i_2, i_2} & \dots & a_{i_2, i_m} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{i_m, i_1} & a_{i_m, i_2} & \dots & a_{i_m, i_m} & & & \\ \hline & & & & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n, i_1} & a_{i_n, i_2} & \dots & a_{i_n, i_m} & & & & \lambda \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix} \lambda^{n-m}$$

حيث $\begin{vmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$ مصغر رئيسي من الدرجة m لـ A والآن

$$s_m = (-1)^m \sum \begin{vmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \end{vmatrix}$$

حيث يضم التجميع $\rho = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \ 2 \ \dots \ m}$ من التوافق المختلفة لـ $1, 2, \dots, n$ أخذت m في كل مرة .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

٢- استخدم العلاقة (19.4) في المسألة ١ فلك $|\lambda I - A|$ إذا علمت أن

$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5 \quad \text{نجد}$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \\ = 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} \\ = -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$|A| = 2$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2. \quad \text{أى}$$

٣- لتكن $\lambda_1, X_1; \lambda_2, X_2; \lambda_3, X_3$ فيها خاصة (جنور مميزة) مختلفة (متباينة) والمتجهات اللامتغيرة المصاحبة للمصفوفة A برهن أن X_1, X_2, X_3 مستقلة خطيا .

لنفرض أن العكس هو الصحيح أى لنفرض وجود مقادير عددية a_1, a_2, a_3 ليست كلها أصفارا وتحقق العلاقة :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0 \quad (i)$$

لنضرب (i) بـ A علما بأن $A X_i = \lambda_i X_i$ فنجد :

$$a_1 A X_1 + a_2 A X_2 + a_3 A X_3 = a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_2 X_2 + a_3 \lambda_3 X_3 = 0 \quad (ii)$$

لنضرب (ii) في A فنجد :

$$a_1 \lambda_1^2 X_1 + a_2 \lambda_2^2 X_2 + a_3 \lambda_3^2 X_3 = 0 \quad (iii)$$

والآن يمكن كتابة العلاقات (i) و (ii) و (iii) كما يلى :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 X_1 \\ a_2 X_2 \\ a_3 X_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (iv)$$

من المسألة هـ من الفصل ٣ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \neq 0$ أى أن B^{-1} موجودة . لنضرب (iv) في B^{-1} فنجد

$[a_1 X_1, a_2 X_2, a_3 X_3]' = 0$ وهذا يتطلب أن يكون $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ وهو ما يتعارض مع الفرض

أى أن X_1, X_2, X_3 تكون مستقلة خطيا .

$$\text{نجد : } \phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi'(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

وهذا يساوى مجموع المصنفات الرئيسية للمصفوفة $I - A$ ذات الدرجة الثانية .

$$\begin{aligned} \phi''(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\{(\lambda - a_{11}) + (\lambda - a_{22}) + (\lambda - a_{33})\} \end{aligned}$$

وهذا يساوى $2!$ من المرات مجموع المصنفات الرئيسية للمصفوفة $I - A$ ذات الدرجة الواحدة

$$\phi'''(\lambda) = 3!$$

$$\text{ونجد أيضا } \phi^{(iv)}(\lambda) = \phi^{(v)}(\lambda) = \dots = 0.$$

هـ - برهن أنه إذا كانت λ_i جذرا مبرزا مكرر r من المرات للمصفوفة المربعة A ذات الدرجة n فإن رتبة $I - A$ لا تقل عن $n - r$ وأن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب لا يزيد عن r .

بما أن λ_i جذرا مكرر r من المرات للمعادلة $\phi(\lambda) = 0$ فإن $\phi(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) = \dots = \phi^{(r-1)}(\lambda_i) = 0$ فإن $\phi(\lambda_i) \neq 0$ ، والآن $\phi^{(r)}(\lambda_i) \neq 0$. و $\phi^{(r)}(\lambda_i)$ يساوى $r!$ مرة مجموع المصفورات الرئيسية ذات الدرجة $(n-r)$ للمصفوفة $\lambda_i I - A$ لذلك لا يمكن أن يتلاشى كل واحد من هذه المصفورات الرئيسية فينتج عن هذا أن رتبة $\lambda_i I - A$ لا يمكن أن تكون أقل من $(n-r)$ وينتج عن (11.2) أن الفراغ الاتجاهي اللامتغير المصاحب لـ $\lambda_i I - A$ أى فراغه الصفري، ذو رتبة لا تزيد عن r .

٦- أوجد المصفوفة الواردة في المسألة ٢ القيم الخاصة والفراغات الاتجاهية اللامتغيرة المصاحبة.

إن القيم الخاصة لهذه المصفوفة هي 1, 1, 1, 2

$$\text{للقية } \lambda = 2 \text{ نجد أن } \lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بعد فراغها الصفري الواحد ويتولد الفراغ الاتجاهي اللامتغير الخاص المصاحب بالمتجه $[2, 3, -2, -3]$

$$\text{للقية } \lambda = 1 \text{ نجد أن رتبة } \lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هو الواحد. أما الفراغ الاتجاهي اللامتغير المصاحب فإنه يتولد بالمتجه $[3, 6, -4, -5]$

٧- برهن أنه إذا كانت α قيمة خاصة لا تساوى الصفر لمصفوفة A مربعة غير شاذة ومن الدرجة n فإن $|A|/\alpha$ تكون قيمة خاصة لـ $\text{Adj } A$

من المسألة ١ يكون :

$$\alpha^n + s_1 \alpha^{n-1} + \dots + s_{n-1} \alpha + (-1)^n |A| = 0 \quad (i)$$

حيث s_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) يساوى $(-1)^i$ من المرات مجموع كل المصفورات الرئيسية ذات الدرجة i لـ A ويكون

$$|\mu I - \text{adj } A| = \mu^n + S_1 \mu^{n-1} + \dots + S_{n-1} \mu + (-1)^n |\text{adj } A|$$

حيث S_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) يساوى $(-1)^j$ من المرات مجموع المصفورات الرئيسية ذات الدرجة j لـ $\text{adj } A$

استنادا إلى (6.4) وتعريف كل من s_i و S_j يكون $S_j = (-1)^j |A|^{n-2} s_1, \dots, S_{n-1} = (-1)^{n-1} |A|^{n-2} s_1$ ، و $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$ أى :

$$|\mu I - \text{adj } A| = (-1)^n \{ (-1)^n \mu^n + s_{n-1} \mu^{n-1} + s_{n-2} |A| \mu^{n-2} + \dots + s_2 |A|^{n-3} \mu^2 + s_1 |A|^{n-2} \mu + |A|^{n-1} \}$$

و

$$|A|^{1-n} |\mu I - \text{adj } A| = (-1)^n \{ 1 + s_1 \left(\frac{\mu}{|A|} \right) + \dots + s_{n-1} \left(\frac{\mu}{|A|} \right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{\mu}{|A|} \right)^n |A| \} = f(\mu)$$

والآن :

$$f\left(\frac{|A|}{\alpha}\right) = (-1)^n \{ 1 + s_1 \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \dots + s_{n-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n |A| \}$$

ومن (i) نجد :

$$\alpha^n f\left(\frac{|A|}{\alpha}\right) = (-1)^n \{ \alpha^n + s_1 \alpha^{n-1} + \dots + s_{n-1} \alpha + (-1)^n |A| \} = 0$$

أى أن $|A|/a$ قيمة خاصة لـ $adj A$

٨- برهن أن المعادلة المميزة لمصفوفة متعامدة P هي معادلة عكسية

إن لدينا :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - P| = |\lambda PIP' - P| = |-P\lambda(\frac{1}{\lambda}I - P')| = \pm\lambda^n |\frac{1}{\lambda}I - P| = \pm\lambda^n \phi(\frac{1}{\lambda})$$

مسائل محلولة

٩- أوجد المصفوفات التالية القيم الخاصة (الجذور المميزة) لكل فراغ وأساس اتجاهى لا متغير مصاحب

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ط) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (د) } \quad \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (هـ) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ز) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ح) } \\ & \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix} \text{ (ى) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ك) } \quad \begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ل) } \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ (م) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ن) } \\ & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (س) } \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ (ع) } \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ف) } \end{aligned}$$

الجواب :

- (أ) 1, [1, 1, 1]'; 2, [2, 1, 0]'; 3, [1, -1, -2]'
- (ب) -1, [1, 0, 1]'; 2, [1, 3, 1]'; 1, [3, 2, 1]'
- (ج) 1, [1, 1, -1]'; 2, [2, -1, -2]';
- (د) 1, [1, -1, 0]';
- (هـ) 2, [2, -1, 0]'; 0, [4, -1, 0]'; 1, [4, 0, -1]'
- (و) 0, [3, -1, 0]'; 1, [12, -4, -1]'
- (ز) 1, [1, 0, -1]'; [0, 1, -1]'; 3, [1, 1, 0]'
- (ح) 0, [1, -1, 0]'; 1, [0, 0, 1]'; 4, [1, 1, 0]'
- (ط) -1, [0, 1, -1]'; i, [1+i, 1, 1]'; -i, [1-i, 1, 1]'
- (ى) 2, [1, 0, 1]'; 1+i, [0, 1, 0]'; 2-2i, [1, 0, -1]'
- (ك) 1, [1, 0, -1, 0]'; [1, -1, 0, 0]'; 2, [-2, 4, 1, 2]'; 3, [0, 3, 1, 2]'
- (ل) 1, [1, 2, 3, 2]'; -1, [-3, 0, 1, 4]'
- (م) 0, [2, 1, 0, 1]'; 1, [3, 0, 1, 4]'; -1, [3, 0, 1, 2]'

١٠- برهن أنه إذا كان X متجه وحدة وإذا كان $AX = \lambda X$ فإن $X^*AX = \lambda$

١١- برهن أن القيم الخاصة (الجذور المميزة) لمصفوفة قطرية هي عناصر قطرها وأن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة

لهذه المصفوفة هي المتجهات الأولية E_i ,

١٢ - برهن النظريتين I و VI .

١٣ - برهن النظرية VI .

إرشاد : إذا كان $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ فإن $|\lambda I - A| = (\lambda + k - \lambda_1)(\lambda + k - \lambda_2) \dots (\lambda + k - \lambda_n)$.

١٤ - برهن أن القيم الخاصة للمجموع المباشر A_1, A_2, \dots, A_s هي القيم الخاصة للمصفوفات A_1, A_2, \dots, A_s .

١٥ - برهن أنه إذا كانت A و $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n وكانت $n > r$ فإنه يكون لكل من NA و AN المعادلة المميزة ذاتها.

١٦ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n والرتبة r فإنه يكون هناك على الأقل $n-r$ من جفورها المميزة أصفارا.

١٧ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n وكانت A غير شاذة فإن $A^{-1}B$ و BA^{-1} القيم الخاصة ذاتها.

١٨ - بين أنه يكون للمصفوفتين B و $A^{-1}BA$ نفس الجذور المميزة حيث المصفوفتين A و B هما المصفوفتان اللواتيتين في المسألة ١٧ .

١٩ - لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n اكتب $|\lambda I - A^{-1}| = |-\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)|$ ثم استنتج أن $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$ هي القيم الخاصة لـ A^{-1} .

٢٠ - برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة متعامدة P ذات قيمة مطلقة مشتركة مساوية الواحد .
إرشاد : إذا كان λ_i و X_i قيمة خاصة (جذور مميزة) لـ P المتجه اللامتغير المصاحب لها فإن $X_i' X_i = (P X_i)' (P X_i) = \lambda_i \lambda_i X_i' X_i$.

٢١ - برهن أنه إذا كان $\lambda_i = \pm 1$ قيمة خاصة لمصفوفة متعامدة P وكان X_i المتجه اللامتغير المصاحب لها فإن $X_i' X_i = 0$.

٢٢ - برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة واحدة ذات قيمة مطلقة مشتركة تساوى الواحد .

٢٣ - استند من النظرية II واستنتج أن :

$$\phi(0) = (-1)^n |A|$$

$\phi(0)$ يساوى $(-1)^{n-1}$ من المرات مجموع المصنفات الرئيسية ذات الدرجة $n-1$ لـ A .

$\phi^{(r)}(0)$ يساوى $(-1)^{n-r} r!$ من المرات مجموع المصنفات الرئيسية ذات الدرجة $(n-r)$ لـ A .

$$\phi^{(n)}(0) = n!$$

٢٤ - عوض من المسألة ٢٣ في :

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \phi'(0) \cdot \lambda + \frac{1}{2!} \phi''(0) \cdot \lambda^2 + \dots + \frac{1}{n!} \phi^{(n)}(0) \cdot \lambda^n$$

لحصول على (19.4)

الفصل العشرون

التشابه

المصفوفتان المتشابهتان :

نقول عن مصفوفتين مربعيتين A و B من الدرجة n إنهما متشابهتان على F فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة R على F بحيث يكون :

$$B = R^{-1}AR \quad (20.1)$$

مثال ١ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{إن المصفوفة الواردة في المثال ١ من الفصل ١٩ والمصفوفة}$$

$$B = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متشابهتان .

إن المعادلة المميزة $(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$ للمصفوفة B هي أيضا المعادلة المميزة للمصفوفة A .
 إن المتجه اللامتغير لـ B المصاحب للقيمة $\lambda = 5$ هو $Y_1 = [1, 0, 0]'$ ومن السهل أن نرى أن $X_1 = RY_1 = [1, 1, 1]'$ متجه لامتغير لـ A مرافق (مصاحب) للقيمة الخاصة ذاتها $\lambda = 5$. ويمكن للقارئ أن يبرهن على أن $Y_2 = [7, -2, 0]'$ و $Y_3 = [17, -3, -2]'$ زوج من المتجهات اللامتغيرة لـ B والمستقلة خطيا والمرافقة لـ $\lambda = 1$ بينما $X_2 = RY_2$ و $X_3 = RY_3$ زوج من المتجهات اللامتغيرة لـ A والمستقلة خطيا والمرافقة لنفس الجذر $\lambda = 1$.

إن المثال ١ : يوضح النظريتين التاليتين .

I. يكون لمصفوفتين متشابهتين نفس الجذور المميزة .

للبرهان أنظر المسألة ١

II. إذا كان Y متجها لامتغير للمصفوفة $B = R^{-1}AR$ المناظر للجذر المميز λ_i لـ B فإن $X = RY$ يكون متجها لامتغيرا للمصفوفة A المناظرة لنفس الجذر المميز λ_i للمصفوفة A

من أجل البرهان أنظر المسألة ٢

المصفوفات القطرية :

إن الجذور المميزة لمصفوفة قطرية $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هي العناصر القطرية لهذه المصفوفة .
 يكون دائما لمصفوفة قطرية n من المتجهات اللامتغيرة المستقلة خطيا . إن المتجهات الأولية E_i تكون مثل هذه

المجموعة لأن $DE_i = a_i E_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$.

كنتيجة لما تقدم نجد (أنظر المسألتين ٣ و ٤ للبرهان).

III. إن لأي مصفوفة مربعة A من الدرجة n المشابهة لمصفوفة قطرية n متجها لا متغيرا مستقلة خطيا.

IV. إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n ولها n متجها لا متغيرا مستقلة خطيا فإنها تكون مشابهة لمصفوفة

قطرية.

أنظر المسألة ٥.

سنبرهن في المسألة ٦ :

V. على حقل F تكون مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت

فقط) المصفوفة $\lambda I - A$ قابلة للتحليل كليا على F وإذا كان تمدد كل λ_i مساوية لعدد الفراغ المعلوم للمصفوفة $\lambda_i I - A$

ليس من الضروري أن تكون كل مصفوفة مربعة من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية . إن المصفوفة الواردة في المسألة ٦ من الفصل ١٩ مثال على ذلك . حيث يناظر الجذر الثلاثي $\lambda = 1$ الفراغ المعلوم للمصفوفة $\lambda I - A$ والذي بعده يساوى الواحد . يمكننا من جهة أخرى أن نبرهن :

VI. يشابه كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n مصفوفة مثلثية عناصر قطرها هي الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألتين ٧ - ٨

ونجسد كحالة خاصة :

VII. إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة ومن الدرجة n ذات جنو مميزة حقيقية ، فإنه يوجد مصفوفة

متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP = P^tAP$ مصفوفة مثلثية عناصرها القطرية هي الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألتين ٩ - ١٠

VIII. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n عناصرها مركبة أو مصفوفة مربعة حقيقية من الدرجة n

جنورها المميزة مركبة ، فإنه توجد مصفوفة واحدة U بحيث تكون $U^{-1}AU = \bar{U}^tAU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألة ١١

نقول عن المصفوفتين A و $P^{-1}AP$ الواردتين في النظرية VII إنهما متشابهتان تمامًا.

ونقول عن المصفوفتين A و $U^{-1}AU$ الواردتين في النظرية VIII إنهما متشابهتان واحديا.

المصفوفة القابلة لأن تكون قطرية :

نقول عن مصفوفة A مشابهة لمصفوفة قطرية إنها قابلة لأن تكون قطرية . إن النظرية IV هي أساس لدراسة

بعض أنواع ، ترد في الفصل القادم من المصفوفات القابلة لأن تكون قطرية .

مسائل محلولة

١ - برهن أنه يكون لمصفوفتين متشابهتين نفس الجذور المميزة .

لنفرض أن A و $B = R^{-1}AR$ مصفوفتان متشابهتان فإن

(i)

$$\lambda I - B = \lambda I - R^{-1}AR = R^{-1}\lambda IR - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)R$$

و

$$|\lambda I - B| = |R^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |R| = |\lambda I - A|$$

وهكذا فإنه يكون لكل من A و B المعادلة المميزة نفسها ونفس الجذور المميزة .

٢- برهن أنه إذا كانت Y متجهاً لا متغيراً لـ $B = R^{-1}AR$ المناظر للجذر المميز λ_i فإن $X = RY$ يكون متجهاً لا متغيراً لـ A المناظر لنفس الجذر المميز λ_i لـ A ينتج من الفرض أن $BY = \lambda_i Y$ و $RB = AR$ أى :

$$AX = ARY = RBY = R\lambda_i Y = \lambda_i RY = \lambda_i X$$

ويكون X متجهاً لا متغيراً للمصفوفة A يناظر الجذر المميز λ_i

٣- برهن أن يكون لأى مصفوفة مربعة A من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية ، n متجهاً لا متغيراً مستقلة خطياً .

لنفرض $R^{-1}AR = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) = B$ أن المتجهات الأولية E_1, E_2, \dots, E_n هى متجهات لا متغيرة لـ B . ونجد استناداً إلى النظرية II أن $X_j = RE_j$ هى متجهات لا متغيرة لـ A وبما أن R غير شاذة فإن أعمدها تكون متجهات مستقلة خطياً .

٤- برهن أنه إذا كان لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ، n متجهاً لا متغيراً مستقلة خطياً ، فإنها تكون مشابهة لمصفوفة قطرية .

لنفرض أن الـ n متجهاً لا متغيراً X_1, X_2, \dots, X_n ، المستقلة خطياً ، تصاحبها على الترتيب الجذور المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بحيث يكون $AX_i = \lambda_i X_i$ ، ($i = 1, 2, \dots, n$) . ولنفرض $R = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ ، فيكون :

$$\begin{aligned} AR &= [AX_1, AX_2, \dots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n] \\ &= [X_1, X_2, \dots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

$$R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{ومنه}$$

٥- إن مجموعة المتجهات اللا متغيرة المستقلة خطياً للمصفوفة A الواردة فى المثال ١ من الفصل ١٩ هى :

$$X_1 = [1, 1, 1]', \quad X_2 = [2, -1, 0]', \quad X_3 = [1, 0, -1]'$$

$$\text{لأخذ } R = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ فيكون } R^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ تكون :}$$

$$R^{-1}AR = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية .

٦- برهن أنه تكون ، على حقل F ، مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n ، مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن تحليل $\lambda I - A$ كلياً فى F وإن تعدد كل λ_i تكون مساوية بعد الفراغ المعلوم للمصفوفة $\lambda_i I - A$

لنفرض أولاً أن $R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = B$ وأن k على الضبط من هذه الجذور المميزة مساوية λ_i فيكون للمصفوفة $\lambda_i I - B$ على الضبط ، k صفراً واقفاً على قطرها وتكون إذن رتبته مساوية $n - k$ وتكون بعد فراغها المعلوم

مساويا $n - (n - k) = k$ ولكن $\lambda_i I - A = R(\lambda_i I - B)R^{-1}$ ؛ إذن $\lambda_i I - A$ يكون له نفس الرتبة $n - k$ والاندامية (صفرية) k التي تكون للمصفوفة $\lambda_i I - B$.

على العكس، لنفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ هي الجذور المميزة المتباينة لـ A وأن هذه الجذور، على الترتيب، تمددات r_1, r_2, \dots, r_s حيث $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$. لرمز $V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_s}$ للفراغات الاتجاهية اللامتغيرة المرافقة. ولنأخذ $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ir_i}$ كأساس للفراغ الاتجاهي اللامتغير V_{r_i} ، ($i = 1, 2, \dots, s$). لنفرض أنه يوجد مقادير عديدة a_{ij} ليست كلها أصفارا بحيث يكون:

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \dots + a_{1r_1}X_{1r_1} + (a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \dots + a_{2r_2}X_{2r_2}) + \dots + (a_{s1}X_{s1} + a_{s2}X_{s2} + \dots + a_{sr_s}X_{sr_s}) = 0$$

والآن كل متجه $Y_i = a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + \dots + a_{ir_i}X_{ir_i} = 0$ ، ($i = 1, 2, \dots, s$)، وإلا فإنه يكون متجهها لامتغيرا وتكون في مجموعها استنادا إلى النظرية I مستقلة خطيا. ولكن هذا يخالف (i) وعلى ذلك فإن المتجهات X تكون أساساً لـ V_n وأن A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية استنادا إلى النظرية IV.

v- برهن أن كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n تشابه مصفوفة مثلثية تكون قطرها من الجذور المميزة لـ A .

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A ولنفرض أن X_1 هو متجه لامتغير لـ A مناظر للقيمة الخاصة λ_1 ولنأخذ X_1 كأول عمود من مصفوفة غير شاذة Q_1 أعمدها الأخرى اختيارية شرط أن يكون $|Q_1| \neq 0$. إن العمود الأول من AQ_1 هو $\lambda_1 X_1$ ، وإن العمود الأول من $Q_1^{-1}AQ_1$ هو $\lambda_1 X_1$ ، ولكن هذا، كعمود أول من $Q_1^{-1}AQ_1$ يكون $[\lambda_1, 0, \dots, 0]$ ، وعلى ذلك

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad (i)$$

حيث A_1 من الدرجة $(n-1)$

بما أن $|\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$ وبما أن $Q_1^{-1}AQ_1$ و A لهما القيم الخاصة ذاتها فإنه ينتج عن ذلك أن القيم الخاصة لـ A_1 هي $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. إذا كانت $n = 2$ فإن $A_1 = [\lambda_2]$ وتكون النظرية قد برهنت مع $Q = Q_1$

وإلا، فلنفرض أن X_2 هو متجه لامتغير لـ A_1 مناظر للقيمة الخاصة (الجذر المميز) λ_2 ولنأخذ X_2 كعمود أول من مصفوفة غير شاذة Q_2 وتؤخذ بقية أعمدها اختيارية ضمن الشرط $|Q_2| \neq 0$ فيكون:

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (ii)$$

حيث A_2 من الدرجة $n-2$ إذا كان $n = 3$ فإن $A_2 = [\lambda_3]$ تكون النظرية قد برهنت وإلا فإننا نكرر الطريقة السابقة وبعد $(n-1)$ خطوات على الأكثر نجد:

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix} \quad (iii)$$

بحيث تكون $Q^{-1}AQ$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

٨- أوجد مصفوفة غير شاذة Q بحيث تكون المصفوفة $Q^{-1}AQ$ مثلثية علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

نجد هنا $|\lambda I - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$ وأن القيم الخاصة هي $1, -1, 2, -2$. لتأخذ $[5.5, -1.3]'$ متجهها لا متغيرا مناظرا للقيمة الخاصة 1 ، كمورد أول في المصفوفة غير الشاذة Q_1 ولتأخذ بقية أعمدها متجهات أولية ولتكن .

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فيكون :

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} , \quad Q_1^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

إن جذراً مميزاً للمصفوفة A_1 هو 1 — والمتجه اللامتغير المصاحب لها هو $[4, 0, -1]'$. لتأخذ $Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فنجد

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad Q_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} ,$$

إن جذراً مميزاً للمصفوفة A_2 هو 2 و $[8, 11]'$ متجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة . لتأخذ $Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ فنجد :

$$Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} , \quad Q_3^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$$

ينتج عما سبق أن :

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix} , \quad Q^{-1} = \frac{1}{160} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} ,$$

٩- إذا كانت A هي أى مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n وذات قيمة خاصة حقيقية ، فإنه توجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A . بها أن هذه القيم حقيقية فإن المتجهات اللامتغيرة المرافقة لها تكون حقيقية أيضاً . كما في المسألة ٧ ، لتأخذ Q_1 مكونة من متجه لا متغير مناظر لـ λ_1 كموداً ول ولتستعمل طريقة

جرام - شيت لنحصل من Q_1 على مصفوفة متعامدة P_1 يتناسب عمودها الأول مع العمود الأول من Q_1 . أى :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

حيث A_1 من الدرجة $(n-1)$ ويكون $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ كجذور مميزة له .

ننتقل بعدما تقدم من Q_2 المصفوفة التى يتكون عمودها الأول من متجه لا متغير لـ A_1 يناظر القيمة الخاصة λ_2 ونستعمل مرة أخرى طريقة جرام - شيت لكى نحصل على المصفوفة المتعامدة P_2 أى :

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

وبعد عدد كاف من هذه العمليات سنحصل على المصفوفة المتعامدة :

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

والتي يكون لها $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

١٠- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} P$$

مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

من المثال ١ من الفصل ١٩ نجد أن القيم الخاصة هي 5, 1, 1 وأن $[1, 0, -1]^T$ هو متجه لا متغير مناظر للقيمة الخاصة $\lambda = 1$

$$\text{لنأخذ } Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ وباستخدام طريقة جرام - شيت نحصل على :}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

كمصفوفة متعامدة يتناسب عمودها الأول مع المتجه $[1, 0, -1]^T$

ونجد بعدما تقدم :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

أن لـ A_1 القيمة الخاصة $\lambda = 1$ $[1, -\sqrt{2}]$ كمتجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة .

نستنتج من $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ تطبيق قاعدة جرام - شيت ، المصفوفة المتعامدة $P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ وتكون المصفوفة .

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{متعامدة و}$$

١١- أوجد مصفوفة واحدة U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A ، علماً بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة لـ A هي $\lambda(\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5-i) = 0$ وإب $0, 1-i, 3+2i$ هي جذور هذه المعادلة المميزة ،

لنأخذ للقيمة $\lambda = 0$ المتجه $[1, -1, 1]$ كتجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة ولنكون

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن طريقة جرام - شميت تعطي المصفوفة الواحدة :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة :

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2}(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{bmatrix}$$

ولذلك ، ولذا الاختيار للمصفوفة Q_1 تكون المصفوفة المطلوبة هي $U = U_1$

١٢- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A علماً بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن 2,3,6 هي القيم الخاصة لـ A وإنه من الممكن أن نأخذ $[1, -2, 1]$ ، $[1, 1, 1]$ ، $[1, 0, -1]$ كجهات لا متغيرة مصاحبة للقيم المذكورة . والآن ، إن هذه الجهات الثلاثة مستقلة ومتعامدة متى فيها بينها . إذا أخذنا :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

فإننا نجد $P^{-1}AP = \text{diag}(2, 3, 6)$. إن هذا يتطلب منا دراسة أكثر كالا للمصفوفات الحقيقية المتأثلة وستتم هذه الدراسة في الفصل القادم .

مسائل إضافية

١٣- أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A وذلك لكل مصفوفة A وردت في المسألة ٩ (أ) و (ب) ، (ج) ، (د) من الفصل ١٩ .

$$\text{الجواب (أ)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\text{(د)} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

١٤- فر لماذا تشابه المصفوفتان (أ) و (ب) من المسألة ١٣ مصفوفة قطرية بيئا لا تحقق ذلك المصفوفتان (ج) و (د) . ادرس المصفوفتان (أ) - (م) المسألة (٩) الفصل ١٩ وعين تلك التي تكون مشابهة لمصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة للمصفوفة المفروضة .

١٥- أوجد لكل مصفوفة A واردة في المسألة ٩ (ط) و (ي) من الفصل ١٩ ، مصفوفة واحدة U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة المثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

$$\text{الجواب : ١ (ط)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -(1+i)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ي}) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

١٦- برهن أنه إذا كانت A مصفوفة ممتثلة وكانت P متعامدة ، فإن $B = P^{-1}AP$ تكون مصفوفة حقيقية ممتثلة .

١٧- ادخل التعديلات الضرورية على المسألة ٩ لكي تبرهن النظرية VIII .

١٨- لنفرض أن B_i و C_i مصفوفتان متشابهتان للقم $(i = 1, 2, \dots, m)$ بين أن المصفوفتين :

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m) \quad \text{و} \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$$

$$R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m) \quad \text{وكون} \quad C_i = R_i^{-1} B_i R_i \quad \text{افرض : إرشاد : متشابهتان}$$

١٩- ليكن $B = \text{diag}(B_1, B_2)$ و $C = \text{diag}(C_1, C_2)$ ، حيث درجة كل من I_2, I_1 وعلى

التوالى من درجتى B_1 و B_2 ثم افرض $R = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$. بين أن $R^{-1}BR = C$ واستنتج أن B و C متشابهتان .

٢٠- مدد نتائج المسألة ١٩ على الحالة التي يكون فيها $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ و C أى مصفوفة نحصل عليها بتغيير مواقع B_i على طول قطر هذه المصفوفة .

٢١- إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n فإن المصفوفتين AB و BA نفس الجذور المميزة .

إرشاد : نفرض $PAQ = N$ فيكون $PABP^{-1} = NQ^{-1}BP^{-1}$ و $Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}N$. أنظر المسألة ١٥ من الفصل ١٩ .

٢٢- إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_s مصفوفات غير شاذة ومن درجة واحدة فبرهن أن لمصفوفات $A_1A_2 \dots A_s, A_2A_3 \dots A_sA_1, A_3 \dots A_sA_1A_2$ المعادلة المميزة ذاتها .

٢٣- لنفرض $Q^{-1}AQ=B$ حيث B مصفوفة مثلثية عناصر قطرها $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A .

(١) بين أن $Q^{-1}A^kQ$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها هي القيم الخاصة لـ A مرفوعة للأس k

$$(ب) \text{ برهن أن } \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{trace } A^k.$$

٢٤- برهن أن علاقة تشابه المصفوفات هي علاقة تكافؤ.

٢٥- برهن أن : لـ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ نفس القيم الخاصة ولكنهما غير متشابهتين.

الفصل الحادى والعشرون

المصفوفات المتشابهة لمصفوفة قطرية

المصفوفات المتماثلة الحقيقية :

يمكن دراسة المصفوفات المتماثلة الحقيقية والمصفوفات الهرميتية سوية ، ولكنا نفضل هنا دراستها بشكل منفصل للمصفوفات المتماثلة الحقيقية ، نجد :

I — أن الجذور المربعة لمصفوفة متماثلة حقيقية ، كلها حقيقية .

أنظر المسألة ١

II — المتجهات اللابتهمة المصاحبة للقيم الخاصة المختلفة لمصفوفة متماثلة حقيقية تكون متعامدة متى .

أنظر المسألة ٢

إذا كانت A حقيقية ومتماثلة ، فإن كل B_i الواردة في المسألة ٩ من الفصل ٢٠ تساوى الصفر . وعلى ذلك :

III إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n متماثلة ، قيمها الخاصة هى $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

فإنه توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث يكون $P'AP = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

إن النظرية III تستلزم .

IV إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i لمصفوفة حقيقية متماثلة فإنه يوجد فراغ لا متغيراً

مصاحب لـ λ_i من البعد r_i

وباستعمال مصطلحات الأشكال التربيعية الحقيقية تأخذ النظرية III الشكل التالى :

V. يمكن اختزال كل شكل تربيعى حقيقى $q = X'AX$ بواسطة التحويل المتعامد $X=BY$ إلى الشكل القانونى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (21.1)$$

حيث r رتبة A و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ هى القيم الخاصة الغير صفيرية للمصفوفة A .

وهكذا فإن رتبة q تساوى عدد القيم الخاصة الغير صفيرية للمصفوفة A بينما يساوى الدليل عدد القيم الخاصة الموجبة أو بشكل آخر ، استناداً إلى قاعدة ديكارات الخاصة بالإشارات ، يساوى عدد التغيرات فى الإشارة فى $|\lambda I - A| = 0$

VI . تكون مصفوفة متماثلة حقيقية محددة موجبة ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) جميع قيمها الخاصة موجبة .

التشابه المتعامد : إذا كانت P مصفوفة متعامدة وكان $B = P^{-1}AP$ فإننا نقول عن B إنها مشابهة تعامدياً مع

A حيث أن $P^{-1} = P'$ فإن B تكون أيضاً متطابقة تعامدياً ومكافئة تعامدياً مع A . النظرية III يمكن

إعادة صياغتها كما يلى :

VII إن كل مصفوفة متماثلة حقيقية A تكون مشابهة تعامدياً لمصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

أنظر المسألة ٣

لنفرض أن القيم الخاصة للمصفوفة المتماثلة A قد رتبنا بحيث يكون $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. فتكون المصفوفة $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ هي المصفوفة الوحيدة المشابهة لـ A . تشكل مثل هذه المصفوفات القطرية في مجموعها ، مجموعة قانونية للمصفوفات المتماثلة الحقيقية بالنسبة للتشابه المتعامد ونجد :

VIII تكون مصفوفتان متماثلتان ، حقيقتان متشابهتين تعامدا إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس القيم الخاصة أى إذا كانت (وإذا كانتا فقط) متشابهتين .

أزواج من الصيغ التربيعية الحقيقية نبرهن في المسألة ٤ :

IX إذا كان X^*AX و X^*BX شكلين تربيعيين حقيقيين في (x_1, x_2, \dots, x_n) وإذا كان X^*BX محددا موجبا ، فإنه يوجد تحويل خطى حقيقى غير شاذ $X = CY$ يحول X^*AX إلى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$$

ويحول X^*BX إلى :

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

حيث λ_i هي جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$.

أنظر أيضا المسألتين ٤ - ٥

المصفوفات الهرميتية : بالموازاة مع النظريات الخاصة بالمصفوفات المتماثلة الحقيقية ، يكون لدينا :

X - إن القيم الخاصة لمصفوفة هرميتية مقادير حقيقية .

أنظر المسألة ٧

XI - إن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة لقيم خاصة مختلفة (متباينة) لمصفوفة هرميتية ، متعامدة متنى .

XII - إذا كانت H مصفوفة هرميتية مربعة من الدرجة n قيمها الخاصة هي $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإنه توجد مصفوفة واحدة U بحيث يكون $\bar{U}'HU = U^{-1}HU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. تسمى المصفوفة H بأنها مصفوفة ذات تشابه واحد لـ $U^{-1}HU$

XIII - إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i للمصفوفة الهرميتية H ، فإنه يصاحب λ_i فراغ لا متغيرا بعده λ_i .

لنفرض أن القيم الخاصة للمصفوفة الهرميتية H قد رتبنا بحيث يكون $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. فتكون المصفوفة $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ هي المصفوفة القطرية الوحيدة المشابهة لـ H .

تكون جميع المصفوفات القطرية ، من هذا النوع ، مجموعة قانونية للمصفوفات الهرميتية بالنسبة للتشابه الواحدى ، ونجد ما يلى :

XIV - تكون مصفوفتان هرميتيتان متشابهتين واحديا ، فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس القيم الخاصة أى إذا (وإذا فقط) كانتا متشابهتين .

المصفوفات النظامية نقول عن مصفوفة مربعة A من الدرجة n إنها نظامية فيما إذا كان $\bar{A}A' = A\bar{A}'$. تحوى مجموعة المصفوفات النظامية بصورة خاصة المصفوفات القطرية ، المصفوفات المتماثلة الحقيقية ، المصفوفات الحقيقية المتماثلة تخالفا ، المصفوفات المتعامدة ، المصفوفات الهرميتية ، المصفوفات لهرميتية التخالفية والواحدية .

لنفرض A مصفوفة نظامية و U مصفوفة واحدة ولنكتب $B = \bar{U}'AU$ فيكون $\bar{B}' = \bar{U}'A'U$

$$\bar{B}'B = \bar{U}'A'U \cdot \bar{U}'AU = \bar{U}'A'A U = \bar{U}'A\bar{A}'U = \bar{U}'AU \cdot \bar{U}'A'U = B\bar{B}'$$

وعلى ذلك :

XV - إذا كانت A مصفوفة نظامية و U مصفوفة واحدة فإن $B = \bar{U}'AU$ يكون مصفوفة نظامية .

وسنبرهن في المسألة ٨ :

XVI إذا كان X_i متجهاً لا متغيراً مناظراً للجذر الخاص λ_i للمصفوفة النظامية A ، فإن X_i تكون أيضاً متجهاً لا متغيراً للمصفوفة \bar{A} المناظر للقيمة الخاصة $\bar{\lambda}_i$

سنبرهن في المسألة ٩ :

XVII تكون مصفوفة مربعة A مشابهة واحدياً لمصفوفة قطرية قيمها إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A نظامية .

كنتيجة لمسبق ، نجد :

XVIII إذا كانت A نظامية فإن المتجهات اللامتغيرة المناظرة للقيم الخاصة المتباينة المصفوفة تكون متعامدة

أنظر المسألة ١٠

XIX إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i لمصفوفة نظامية A ، فإن الفراغ اللامتغير المصاحب لها يكون ذا بعد يساوي r_i .

XX تكون مصفوفتان متشابهتين واحدياً ، إذا كان (وإذا كان فقط) لهما القيم الخاصة ذاتها أي إذا كانتا متشابهتين .

مسائل محلولة

١ - برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة مربعة حقيقية متماثلة A ومن الدرجة n كلها حقيقية .

لينفرض أن $h + ik$ قيمة خاصة مركبة للمصفوفة A ، اعتبر :

$$B = \{(h+ik)I - A\}\{(h-ik)I - A\} = (hI - A)^2 + k^2I$$

التي هي مصفوفة حقيقية وشاذة لأن $(h+ik)I - A$ تكون شاذة . يوجد ، إذن ، متجه حقيق X غير صفري بحيث يكون $BX = 0$ وعلى ذلك .

$$X'BX = X(hI - A)^2X + k^2X'X = X'(hI - A)'(hI - A)X + k^2X'X = 0$$

إن المتجه $X(hI - A)$ حقيق وهذا يؤدي إلى $\{(hI - A)X\}'\{(hI - A)X\} \geq 0$. وإن $X'X < 0$ أي أن $k = 0$ وإنه لا توجد قيم خاصة مركبة .

٢ - برهن أن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة لقيم خاصة متباينة لمصفوفة حقيقية متماثلة A تكون متعامدة فيما بينها .

لنفرض X_1 و X_2 متجهان لامتغيران مصاحبان على الترتيب للقيمتين الخاصيتين المختلفتين λ_1 و λ_2 للمصفوفة A فينتج عن هذا :

$$AX_2 = \lambda_2 X_2, \quad AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{كما ينتج أيضاً} \quad X_2'AX_1 = \lambda_1 X_2'X_1 \quad \text{و} \quad X_1'AX_2 = \lambda_2 X_1'X_2$$

لنأخذ منقول هذه المصفوفات فنجد :

$$X_2'AX_1 = \lambda_2 X_2'X_1 \quad \text{و} \quad X_1'AX_2 = \lambda_1 X_1'X_2$$

وهكذا نجد $\lambda_1 X_1'X_2 = \lambda_2 X_1'X_2$ وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإنه يكون $X_1'X_2 = 0$ أي أن X_1 و X_2 متعامدان .

٣ - أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A إذا علم أن :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة للمصفوفة المفروضة هي :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda - 10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$$

وإن جذور هذه المعادلة هي 6, 6, 12 .

للقية $\lambda = 6$ نجد $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ أو $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ لنختار كمتجهين لامتغيرين مصاحبين

المتجهين المتعامدين $X_1 = [1, 0, -1]$ و $X_2 = [1, 1, 1]$ ولنأخذ في حالة $\lambda = 12$ المتجه $X_3 = [1, -2, 1]$ كمتجه لامتغيراً مرافقاً .

باستخدام الصيغ المعيرة لهذه المتجهات كأعمدة في المصفوفة P نجد :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

سيترك ، كتمرين ، برهان صحة العلاقة $P^{-1}AP = \text{diag}(6, 6, 12)$.

؛ - برهن أنه إذا كان $X'AX$ و $X'BX$ شكلين تربيعيين حقيقيين في (x_1, x_2, \dots, x_n) وإذا كان $X'BX$ عدداً موجباً ، فإنه يوجد تحويل خطى حقيقى غير شاذ $X = CY$ يحول $X'AX$ إلى $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ ويحول $X'BX$ إلى $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تمثل جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$ يوجد كنتيجة للنظرية VII تحويل متعامد $X = GV$ يحول $X'AX$ إلى

$$V'(G'BG)V = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \dots + \mu_n v_n^2 \quad (i)$$

حيث $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ هي القيم الخاصة (كلها موجبة) للمصفوفة B . لنفرض $H = \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, \dots, 1/\sqrt{\mu_n})$ فينتج عن هذا أن $V = HW$ يحول (i) إلى :

$$W'(H'G'BGH)W = w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 \quad (ii)$$

يوجد تحويل متعامد $W = KY$ يحول الشكل التربيعى الحقيقى $W'(H'G'BGH)W$ إلى :

$$Y'(K'H'G'BGHK)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هي القيم الخاصة لـ $H'G'BGH$ وهكذا نجد أن هناك تحويلاً حقيقياً غير شاذ $X = CY = GHKY$

يحول $X'AX$ إلى $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ كما يحول $X'BX$ إلى :

$$Y'(K'H'G'BGHK)Y = Y'(K^{-1}IK)Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

وذلك بما أنه لكل قيم λ :

$$\begin{aligned} K'H'G'(\lambda B - A)GHK &= \lambda K'H'G'BGHK - K'H'G'AGHK = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ &= \text{diag}(\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

فإنه ينتج عن ذلك أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هي جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$

٥ - استنتاجاً من المسألة ٣ نجد أن التحويل الخطي :

$$\begin{aligned} X = (GH)W &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix} W \\ &= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \\ 0 & 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \end{bmatrix} W \end{aligned}$$

$$\text{بحول } q = X'BX = X' \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} X \text{ إلى } W'IW.$$

إن نفس التحويل يحول

$$W' \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} W \text{ إلى } X'AX = X' \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} X$$

بما أن المصفوفة الأخيرة مصفوفة قطرية فإن التحويل $W=KY$ الوارد في المسألة ٤ هو التحويل المحايد $W = I$ Y .

وهكذا نجد أن التحويل الخطي الحقيقي $Y=(GH)X=CY$ يحول الشكل التربيعي المحدد الموجب $X'BX$ إلى $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

ويحول الشكل التربيعي $X'AX$ إلى $\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$ برجي ، كتمرين ، البرهان على صحة العلاقة

$$|\lambda B - A| = 36(3\lambda - 1)(2\lambda - 1)^2.$$

٦ - برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة A حقيقية غير شاذة بالشكل $A=CP$ حيث C مصفوفة محددة موجبة

ومتماثلة و P مصفوفة متعامدة .

بما أن A غير شاذة ، فإنه AA' ، استناداً إلى النظرية X الفصل ١٧ ، تكون مصفوفة محددة موجبة ومتماثلة أي أنه

توجد مصفوفة متعامدة Q بحيث يكون $Q^{-1}AA'Q = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = B$ حيث كل $0 < k_i$. لنعرف

المصفوفتين $B_1 = \text{diag}(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \dots, \sqrt{k_n})$ و $C = QB_1Q^{-1}$ فينتج أن C مصفوفة محددة موجبة

$$\text{ومتناظرة وأن } C^2 = QB_1Q^{-1}QB_1Q^{-1} = QB_1^2Q^{-1} = QBQ^{-1} = AA'.$$

لنعرف $P=C^{-1}A$ فيكون $PP' = C^{-1}AA'C^{-1} = C^{-1}C^2C^{-1} = I$ ونستنتج أن P مصفوفة متعامدة . وهذا نكون

قد برهننا على أن $A=CP$ حيث C محددة موجبة ومتماثلة و P مصفوفة متعامدة كما هو مطلوب .

٧ - برهن : أن القيم الخاصة لمصفوفة هرميتية كلها حقيقية .

لتكن λ_i قيمة خاصة للمصفوفة الهرميتية H يوجد عندئذ متجه غير صفري X_i يحقق العلاقة $H X_i = \lambda_i X_i$

والآن $X_i' H X_i = \lambda_i \bar{X}_i' X_i$ حقيقى ويختلف عن الصفر ويكون الأمر ذاته بالنسبة لمقول المصفوفة المرافقة $\bar{X}_i' H X_i = \bar{\lambda}_i \bar{X}_i' X_i$. وهكذا نجد أن $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ أى أن λ_i حقيقى .

٨ - برهن أنه إذا كان X_i متجهاً لامتغيراً مناظر القيمة الخاصة λ_i لمصفوفة نظامية A ، فإن X_i يكون متجهاً لامتغيراً لـ A^1 . يناظر القيمة الخاصة λ_i .
بما أن A نظامية فإنه يكون :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A})' &= (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A}') = \lambda \bar{\lambda} I - \lambda \bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A} \bar{A}' \\ &= \bar{\lambda} \lambda I - \lambda \bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A}' A = (\bar{\lambda} I - \bar{A}')(\lambda I - A) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $\lambda I - A$ مصفوفة نظامية - وبما أننا فرضنا : فإن $BX_i = (\lambda_i I - A)X_i = 0$;
 $\bar{B}'X_i = (\bar{\lambda}_i I - \bar{A}')X_i = 0$ و $(\bar{B}'X_i)'(BX_i) = \bar{X}_i' \bar{B}' \cdot BX_i = \bar{X}_i' B \cdot \bar{B}' X_i = (\bar{B}' X_i)'(\bar{B}' X_i) = 0$
وإن X_i متجه لامتغيراً لـ A^1 يناظر القيمة الخاصة $\bar{\lambda}_i$.
٩ - برهن أن مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n ، تكون مشابهة واحدياً لمصفوفة قطرية ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفة نظامية .

لنفرض A نظامية فإنه يوجد ، كنتيجة للنظرية VIII من الفصل ٢٠ ، مصفوفة واحدة U بحيث يكون :

$$\bar{U}' A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

ونجد استناداً إلى النظرية XV أن B نظامية وأن $\bar{B} B = B \bar{B}$. والآن ، إن العنصر الواقع فى الصف الأول والعمود الأول من $B \bar{B}$ هو $\lambda_1 \bar{\lambda}_1$ بينما يكون العنصر المناظر له فى $\bar{B} B$ هو :

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + b_{12} \bar{b}_{12} + b_{13} \bar{b}_{13} + \dots + b_{1n} \bar{b}_{1n}$$

بما أن هذه العناصر متساوية وأن كل $b_{1j} \bar{b}_{1j} \geq 0$ ، فإننا نستنتج أن كل $b_{1j} = 0$. وبلاستطراد بالنسبة للعنصر الواقع فى الصف الثانى والعمود الثانى ... وهكذا ، فإننا نستنتج أن كل b_{ij} يساوى الصفر وأن $B = \text{dia}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
على العكس ، لنفرض أن A مصفوفة قطرية فتكون A نظامية .

١٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن المتجهات اللامتغيرة المناظرة للقيم الخاصة المتباينة لهذه المصفوفة ، تكون متعامدة .

لتكن X_1 و X_2 و λ_1 و λ_2 قيمتين خاصيتين متباينتين والمتجهين اللامتغيرين المرافقين للمصفوفة A فيكون $A X_1 = \lambda_1 X_1$ و $A X_2 = \lambda_2 X_2$ ونجد استناداً إلى المسألة ٨ أن $\bar{X}_1' A X_1 = \lambda_1 \bar{X}_1' X_1$ وبأخذ المرافق نجد : $\bar{X}_1' A' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$. ولكن $\bar{X}_1' A' X_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2$. وهكذا نجد $\bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$. وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإن العلاقة $X_1' X_2 = 0$ تكون قد برهنت كما هو مطلوب .

١١ - اعتبر القطع المخروطى : $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 40$ أو

$$X' A X = X' \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} X = 40 \quad (i)$$

منسوباً لمجموعة محاور الاحداثيات المتعامدة OX_1 و OX_2

أن المعادلة المميزة لـ A هي :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 8) = 0$$

لنأخذ للقيمتين الخاصيتين $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -8$ المتجهين اللامتغيرين $[3, -2]$ و $[2, 3]$ المصاحبين على الترتيب لهاتين القيمتين الآن لنشكل المصفوفة المتعامدة $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ حيث عموداها هما المتجهان المذكوران آنفاً ، بعد تغييرها . إن التحويل $X = PY$ يتحول (i) إلى

$$Y' \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} Y = 5y_1^2 - 8y_2^2 = 40$$

ونجد أن القطع المخروطى المفروض قطع زائد .

إن هذه الطريقة قد قامت بعملية دوران المحاور المعتادة فى الهندسة التحليلية المستوية والى هدف إلى حذف حاصل الضرب المتقاطع فى معادلة القطع المخروطى . ولنلاحظ أن استناداً إلى النظرية VII يعرف هذا الناتج عندما تعرف القيم الخاصة للمصفوفة .

١٢ - إن إحدى مسائل الهندسة التحليلية فى الفراغ ، هى اختزال معادلة سطح تربيعى ، بواسطة انتقال ودوران المحاور ، إلى أبسط أشكالها . إن الصعوبة تكن فى تحديد موضع المركز . وتعيين الإتجاهات الرئيسية أى إتجاهات محاور القطع بعد الدوران . سنبن فما يل . بدون تبرير لمراحل البرهان المتتالية ، دور مصفوفتين فى اختصار معادلة سطح تربيعى مركزى .

ليكن السطح $0 = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9$ ، المصفوفتان المثلثتان :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

المكونة على الترتيب من الحدود ذات الدرجة الثانية ومن كل الحدود .

إن المعادلة المميزة لـ A هي

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وإن القيم الخاصة ومتجهات الوحدة اللامتغيرة المصاحبة هي :

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right]'; \quad \lambda_2 = 4, \quad v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right] \quad \lambda_3 = -2, \quad v_3 = \left[0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]'$$

باستخدام تحويلات الصفوف الأولية $H_j(K)$ و $H_{ij}(K)$ فقط (حيث $j \neq 4$) فإننا نجد :

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 \text{ فنجد من } \begin{cases} 3x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \text{ لمتبر } B_1 \text{ كصفوفة مددة لمجموعة المعادلات}$$

الحل $x = 1, y = 0, z = 4$ أو $C(-1, 0, 4)$ ومن D_2 نجد : $d = -4$
إن رتبة A تساوى 3 ورتبة B تساوى 4 وإن مركز السطح التربيعى يقع فى النقطة $C(-1, 0, 4)$ وتكون
المعادلة المختزلة المطلوبة هى :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0$$

إن معادلات الانتقال هى $x = x' - 1$ $y = y'$ و $Z = Z' + 4$
وإن الاتجاهات الرئيسية هى v_1, v_2, v_3 لرمز بالرمز E لمكوس المصفوفة $[v_1, v_2, v_3]$ فتكون معادلات
دوران المحاور إلى الاتجاهات الرئيسية هى :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [X \ Y \ Z] \cdot E = [X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

مائل افسانفة

١٣ - أوجد ، لكل من المصفوفات A المتأثلة الحقيقية التالية ، مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$
قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة للمصفوفة A .

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \text{الجواب : (أ)}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$١٤ - أوجد تحويلاً خطياً يختزل $X^T B X$ إلى (17) $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ إلى $X^T A X$ و $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$$

حيث λ هى جذور المعادلة $\lambda A - B = 0$ علماً أن :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3\sqrt{10} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3\sqrt{10} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3\sqrt{10} \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad \text{الجواب : (أ)}$$

١٥ - برهن النظرية IV .

إرشاد : إذا كان $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n)$ فإن $(\lambda_1 I - A)P = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, \dots)$

تكون من رتبة تساوى $n - r$ $\lambda_1 - \lambda_{r+1}, \lambda_1 - \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_1 - \lambda_n$

١٦ - عدل فى برهان المسألة ٢ لكتب به النظرية XI .

١٧ - برهن النظريات : XII و XIII و XIX .

١٨ - عين كلا من الحالات الهندسية التالية :

$$108x_1^2 - 312x_1x_2 + 17x_2^2 = 900, \quad (ج) \quad 20x_1^2 - 24x_1x_2 + 27x_2^2 = 369, \quad (ا)$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 8 \quad (د) \quad 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4, \quad (ب)$$

١٩ - تفرض A مصفوفة حقيقية ومماثلة تخالفية ، برهن :

(ا) أن كل قيمة خاصة لـ A إما أن تساوى الصفر أو أن تكون تخيلية بحتة .

(ب) أن $I + A$ و $I - A$ غير شاذتين .

(ج) $B = (I+A)^{-1}(I-A)$ مصفوفة متعامدة . (أنظر المسألة ٣٥ من الفصل ١٣) .

٢٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وغير شاذة فإن A^{-1} يكون كذلك .

٢١ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن A تكون مشابهة لـ A' .

٢٢ - برهن أن مصفوفة مربعة A تكون نظامية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن تمثيلها بالشكل $H + iK$ حيث

H و K مصفوفتان هرميتان تبدليتان .

٢٣ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n قيمها الخاص $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإن A تكون نظامية

فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) القيم الخاصة لـ A' هي $\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_n\bar{\lambda}_n$.

إرشاد : اكتب $U^{-1}AU = T = [t_{ij}]$ حيث U مصفوفة واحدة و T مصفوفة مثلية . إن $\text{tr}(T\bar{T}') = \text{tr}(A\bar{A}')$

تتطلب $t_{ij} = 0$ لقيم $i \neq j$.

٢٤ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة ، فإن A' تكون مصفوفة هرميتية محددة موجبة . اذكر

هذه النظرية عندما تكون A مصفوفة حقيقية وغير شاذة .

٢٥ - برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من الدرجة n ونظاميتين وإذا كانت A و B' تبدليتين

فإن AB و A و B مصفوفتان نظاميتان .

٢٦ - لنفرض أن الدالة المميزة للمصفوفة A المربعة من الدرجة n هي :

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

ولنفرض أنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \dots, \lambda_s I_{r_s}) \quad (1)$$

لنرمز بالرمز B_i حيث $(i = 1, 2, \dots, s)$ للمصفوفات المربعة ذات الدرجة $(0, 0, \dots, 0, I_{r_i}, 0, \dots, 0)$

التي نحصل عليها بالاستعاضة عن λ_i بـ I وعن λ_j ($j \neq i$) بصفر في الطرف الأيمن من (١) ولنفرض :

$$E_i = PB_iP^{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

برهن أن :

$$P^{-1}AP = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_s B_s \quad (ا)$$

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_s E_s \quad (ب)$$

(ج) كل واحدة من E_i متحدة القوى .

$$E_i E_j = 0 \quad (د) \quad i \neq j$$

$$E_1 + E_2 + \dots + E_s = I \quad (هـ)$$

(و) إن رتبة E_i تساوى قوة تضاعف (تعددية) القيمة الخاصة λ_i

$$(\lambda_i I - A)E_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (ز)$$

(ج) إذا كان $p(x)$ كثيرة حدود في x فإن $p(A) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \dots + p(\lambda_s)E_s$.

إرشاد : برهن أن : $A^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \dots + \lambda_s^2 E_s$, $A^3 = \lambda_1^3 E_1 + \lambda_2^3 E_2 + \dots + \lambda_s^3 E_s$, ...
(ط) إن كل E_i كثيرة حدود في A .

إرشاد : افترض $f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$, ($i = 1, 2, \dots, s$). و $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$

فيكون عندئذ $f_i(A) = f_i(\lambda_i)E_i$.

(ي) تكون المصفوفة B تبديلية مع A فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) تبديلية مع كل E_i

إرشاد : إذا كانت B تبديلية مع A فإنها تكون تبديلية مع كل كثيرة حدود A

(ك) إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن كل مصفوفة E_i هرميتية.

(ل) إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن :

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1}E_1 + \lambda_2^{-1}E_2 + \dots + \lambda_s^{-1}E_s$$

(م) إذا كانت A مصفوفة هرميتية محددة موجبة فإن :

$$H = A^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}E_1 + \sqrt{\lambda_2}E_2 + \dots + \sqrt{\lambda_s}E_s$$

تكون مصفوفة هرميتية محددة موجبة.

(ن) تسمى المعادلة (ب) التحليل الطيفي للمصفوفة A . برهن أن هذه المعادلة وحيدة.

٢٧ - (أ) أوجد التحليل الطيفي لـ

$$A = \begin{bmatrix} 24 & -20 & 10 \\ -20 & 24 & -10 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} = 49 \begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{196} \begin{bmatrix} 29 & 20 & -10 \\ 20 & 29 & 10 \\ -10 & 10 & 44 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \text{ أوجد}$$

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} 38/9 & -20/9 & 10/9 \\ -20/9 & 38/9 & -10/9 \\ 10/9 & -10/9 & 23/9 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \text{ أوجد}$$

٢٨ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وتبديلية مع B ، فإن A و B تبديليتان.

إرشاد : استفد من المسألة ٢٦ (ي).

٢٩ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإنه توجد مصفوفة واحدة U ومصفوفة هرميتية محددة موجبة H

بحيث يكون $A = H U$

إرشاد : عرف H بالعلاقة $H^2 = A A^*$ و $U = H^{-1}A$.

٣٠ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن A تكون نظامية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفتان

U و H الواردتان في المسألة ٢٩، تبديليتين.

٣١ - برهن أن المصفوفة المربعة A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) توجد مصفوفة

هرميتية محددة موجبة H بحيث يكون AH^{-1} مصفوفة نظامية.

٣٢ - برهن أن مصفوفة حقيقية متماثلة (هرميتية) تكون متحدة القوى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) قيمها الخاصة

مساوية للصفر أو الواحد.

- ٣٣ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) ومتحدة القوى فإن $t_r A = t_r$.
- ٣٤ - لنفرض أن A مصفوفة نظامية وأن $B = I + A$ مصفوفة غير شاذة وأن $C = B^{-1} \bar{B}$. برهن : (أ) أن A و $(\bar{B})^{-1}$ تبديلان . (ب) أن C مصفوفة واحدة .
- ٣٥ - برهن أنه إذا كانت H مصفوفة هرمتية فإن $(I+iH)^{-1}(I-iH)$ تكون مصفوفة واحدة .
- ٣٦ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن مجموعة الأعداد X حيث $X^k A$ تكون مصفوفة واحدة ، تسمى **حقل قيم A** . برهن مايلي :
- (أ) تقع القيم الخاصة لـ A في حقل قيمها .
- (ب) يقع كل عنصر قطري من A وكل عنصر قطري من المصفوفة $U^{-1} A U$ حيث U مصفوفة واحدة ، في **حقل قيم A** .
- (ج) إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) فإن كل عنصر من حقل قيمها يكون حقيقياً .
- (د) إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) فإن حقل قيمها هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمحقة للملاحة $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n$ حيث λ_1 هي أصغر القيم الخاصة لـ A و λ_n أكبر هذه القيم الخاصة .

الفصل الثاني والعشرون

كثيرات الحدود على حقل

مجال (نطاق) كثيرات الحدود على F لتكن λ رمزاً مجرداً (غير معين) ولنفرض أنه قابل للتبديل مع نفسه ومع كل عنصر من حقل F نسى التعبير .

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \lambda^0 \quad (22.1)$$

حيث a_i هي عناصر من F ، كثير حدود في λ على F

إذا كانت كل $a_i = 0$ فإن (22.1) يسمى صفر كثيرات الحدود ونكتب $f(\lambda) = 0$ إذا كان $a_n \neq 0$ فإننا نقول عن (22.1) إنه من الدرجة n ونسمى a_n معامل المتكبر . نقول عن كثير الحدود $f(\lambda) = a_0 \lambda^0 = a_0 \neq 0$ إنه من الدرجة صفر . إن درجة صفر كثيرات الحدود غير معرف . إذا كان $a_n = 1$ في (22.1) فإن كثير حدود يسمى واحدى .

نقول عن كثيرى الحدود في λ اللذين ، بصرف النظر عن الحدود ذات المعاملات الصفرية ، يحويان نفس الحدود ، إنهما متساويان .

نسئ كثيرات الحدود (22.1) في مجموعها مجال كثيرات الحدود $F[\lambda]$ على F .

المجموع وحاصل الضرب : إذا اعتبرنا كل كثير حدود من $F[\lambda]$ كعنصر من مجموعة أعداد ، فإنه يكون لنطاق كثيرات الحدود أغلب خواص الحقل وليست كلها .

مثال ذلك :

$$f(\lambda) \cdot g(\lambda) = g(\lambda) \cdot f(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) + g(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda)$$

إذا كان $f(\lambda)$ من الدرجة m و $g(\lambda)$ من الدرجة n فإنه يكون :

(i) $f(\lambda) + g(\lambda)$ يكون من الدرجة m إذا كان $n < m$ ومن درجة لا تزيد عن m إذا كانت $n = m$ ومن الدرجة n إذا كان $n > m$.

(ii) $f(\lambda) \cdot g(\lambda)$ يكون من الدرجة $m + n$.

إذا كان $f(\lambda) \neq 0$ بينما $f(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$ فإن $g(\lambda) = 0$.

وإذا كان $g(\lambda) \neq 0$ ، و $h(\lambda) \cdot g(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda)$ ، فإن $h(\lambda) = k(\lambda)$.

خارج القسمة :

سنبرهن في المسألة ١ :

I إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda) \neq 0$ كثيرى حدود من $F[\lambda]$ فإنه يوجد كثيرا حدود وحيدان $h(\lambda)$

و $r(\lambda)$ من $F[\lambda]$ حيث $r(\lambda) \neq 0$ أما أن تكون صفر كثيرا الحدود أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ ، بحيث يكون :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad (22.2)$$

تسمى هنا $r(\lambda)$ باقى قسمة $f(\lambda)$ على $g(\lambda)$. إذا كان $r(\lambda) = 0$ فإننا نقول إن $g(\lambda)$ يقسم $f(\lambda)$ وإن $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ فتسمى عوامل $f(\lambda)$.
 لنفرض أن $f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda)$. إذا كان $g(\lambda)$ من الدرجة صفر أى إذا كان $g(\lambda) = c$ حيث c عدد ثابت فإننا نقول عن هذا التحليل إلى العوامل إنه تافه . نقول عن كثير الحدود الغير ثابت على F ، إنه غير قابل للاختزال على F فيما إذا كان تحليله الوحيد إلى عوامل تافه .

مثال ١ : إن $\lambda^2 - 3$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الجذرية ، وهو قابل للتحليل على حقل الأعداد الحقيقية بالشكل $(\lambda + \sqrt{3})(\lambda - \sqrt{3})$. أن $\lambda^2 + 4$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الحقيقية (وبالتالي على حقل الأعداد الجذرية) بينما يمكن تحليله على حقل الأعداد المركبة بالشكل $(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$.

نظرية الباقي ليكن $f(\lambda)$ أى كثير حدود و $g(\lambda) = \lambda - a$. فنأخذ هنا العلاقة (22.2) الشكل التالى :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot (\lambda - a) + r \quad (22.3)$$

حيث r خالية من λ . ينتج عن (22.3) أن $f(a) = r$ ويكون :

II . إذا قسم $f(\lambda)$ على $\lambda - a$ حتى نحصل على باقى خال من λ فإن هذا الباقى يكون $f(a)$.

III . يكون $(\lambda - a)$ أحد عوامل كثير الحدود $f(\lambda)$ إذا كان (وإذا كان فقط) $f(a) = 0$.

القاسم المشترك الأعظم : إذا قسم $h(\lambda)$ كلا من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فإننا نسميه قاسمًا مشتركًا لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$. نقول عن كثير حدود $d(\lambda)$ إنه قاسم مشترك أعظم لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيما إذا كان :

(i) $d(\lambda)$ واحدياً .

(ii) $d(\lambda)$ قاسم مشترك لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$.

(iii) كل قاسم مشترك لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يكون قاسمًا لـ $d(\lambda)$.

سنبرهن فى المسألة ٢ :

VI إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود من $F[\lambda]$ ليسا معدومين فى وقت واحد معاً ، فإنه يوجد لهما قاسم مشترك أعظم وحيد $d(\lambda)$ كما يوجد فى $F[\lambda]$ كثير الحدود $d(\lambda)$ و $k[\lambda]$ بحيث يكون :

$$d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) \quad (22.4)$$

أنظر المسألة ٣

إذا كان القاسم المشترك الوحيد لكثيرى الحدود $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ ثابت فإن القاسم المشترك الأعظم لهما هو $d(\lambda) = 1$

مثال ٢ : إن القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ و $g(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ هو $\lambda^2 + 3\lambda + 5$ وإن (22.4) تكون

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = \frac{1}{5}f(\lambda) - \frac{1}{5}g(\lambda)$$

ولدينا أيضاً $0 = (\lambda^2 + 4) \cdot g(\lambda) + (1 - \lambda^2) \cdot f(\lambda)$. إن هذا يوضح :

V إذا كان القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(\lambda)$ فى الدرجة $n < 0$ ولكثير الحدود $g(\lambda)$ فى الدرجة $m < 0$ ، مخالفاً للواحد ، فإنه يوجد كثير حدود غير صفري $a(\lambda)$ من درجة أقل من m وكثير حدود $b(\lambda)$ درجته أصغر من n بحيث يكون :

$$a(\lambda) \cdot f(\lambda) + b(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$$

أنظر المسألة ٤

والعكس صحيح

كثيرات الحدود الأولية نسبياً :

نقول عن كثيرى حدود إنهما أوليان نسبياً فيما إذا كان قاسمهما المشترك الأعظم هو الواحد .

IV. إذا كان $g(\lambda)$ غير قابل للاختزال في $F[\lambda]$ وكان $f(\lambda)$ كثير حدود من $F[\lambda]$ فإنه إما أن يكون $g(\lambda)$ قاسماً لـ $f(\lambda)$ وإما أن يكون $g(\lambda)$ أولياً نسبياً مع $f(\lambda)$.

VII. إذا كان $g(\lambda)$ غير قابل للاختزال ولكنه يقسم $h(\lambda)$ فإن $f(\lambda)$ يقسم على الأقل واحداً من $f(\lambda)$ و $h(\lambda)$.

VIII. إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ أوليين نسبياً وإذا كان كل منهما قاسماً لـ $h(\lambda)$ فإن $g(\lambda) \cdot f(\lambda)$ يكون قاسماً لـ $h(\lambda)$.

التحليل الوحيد : سبرهن في المسألة ه مايلي :

IX يمكن كتابة كل كثير حدود غير صفري $f(\lambda)$ بالشكل :

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda) \quad (22.5)$$

حيث $c \neq 0$ ثابت و $q_i(\lambda)$ كثير حدود واحد غير قابل للاختزال من $F[\lambda]$.

مسائل محلولة

١ - برهن أنه إذا كان $f(\lambda) \neq 0$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود في $F[\lambda]$ ، فإنه يوجد كثيرا حدود ، وحيدتين $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ في $F[\lambda]$ حيث $r(\lambda)$ إما أن يكون صفر كثيرا الحدود أو أن يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ وبحيث يكون :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad (i)$$

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad \text{لنفرض :}$$

$$g(\lambda) = b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0. \quad b_m \neq 0 \quad \text{و}$$

إن من الواضح أن هذه النظرية صحيحة إذا كان $f(\lambda) = 0$ أو إذا كان $m > n$ لنفرض أن $m \leq n$ فيكون عندئذ :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m} \lambda^{n-m} g(\lambda) = f_1(\lambda) = c_p \lambda^p + c_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + c_0$$

إما أن يكون صفر كثيرا الحدود أو أن يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$.

إذا كان $f_1(\lambda) = 0$ أو كان من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ فإننا نكون قد برهننا النظرية حيث $h(\lambda) = \frac{a_n}{b_m} \lambda^{n-m}$ و $r(\lambda) = f_1(\lambda)$ وإذا لم يكن ذلك نكون :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m} \lambda^{n-m} g(\lambda) - \frac{c_p}{b_m} \lambda^{p-m} g(\lambda) = f_2(\lambda)$$

مرة ثانية إذا كان $f_2(\lambda) = 0$ أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ فإننا نكون قد برهننا النظرية ، وإذا لم يكن ذلك ، نكرر هذه الطريقة . بما أن درجة الباقي (التي نفرضها لاتساوى الصفر) تنخفض في كل مرحلة من مراحل البرهان

فإننا سنجد ، في آخر الأمر ، باقياً $r(\lambda) = f_s(\lambda)$ يكون إما صفر كثيرات الحدود أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$.

لبرهان الوحداية نفرض :

$$f(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda) + s(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$$

حيث درجتا $r(\lambda)$ و $s(\lambda)$ تقلان عن درجة $g(\lambda)$ ويكون :

$$h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

$$[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda) = r(\lambda) - s(\lambda)$$

و

والآن $r(\lambda) - s(\lambda)$ يكون من درجة أقل من m بينما تكون درجة $[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda)$ تساوى أو تزيد عن m باستثناء الحالة التي يكون فيها $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$. إذن $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$ و $r(\lambda) - s(\lambda) = 0$. أى أن $k(\lambda) = h(\lambda)$ و $r(\lambda) = s(\lambda)$ وهذا يقتضى أن يكون $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ وحيدين .

٢ - برهن أنه إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود فى $F(\lambda)$ ليسا معلومين معا ، فإنه يكون لها قاسم مشترك أعظم وحيد $d(\lambda)$ كما يوجد كثيراً حدود $h(\lambda)$ و $k(\lambda)$ فى F بحيث يكون :

$$d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) \quad (a)$$

إذا كان $f(\lambda) = 0$ فإن $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$ حيث b_m هو المعامل المتقدم فى $g(\lambda)$ ونحصل على (a) حيث $k(\lambda) = b_m^{-1}$ و $h(\lambda) = 1$

لنفرض الآن ، أن درجة $g(\lambda)$ لاتزيد عن درجة $f(\lambda)$. نستنتج من النظرية 1 أن :

$$f(\lambda) = q_1(\lambda) \cdot g(\lambda) + r_1(\lambda) \quad (i)$$

حيث يكون $r_1(\lambda) = 0$ أو أنه يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$. إذا كان $r_1(\lambda) = 0$ فإن $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$ ونحصل على (a) حيث $h(\lambda) = 0$ و $k(\lambda) = b_m^{-1}$

إذا كان $r_1(\lambda) \neq 0$ فإننا نجد :

$$g(\lambda) = q_2(\lambda) \cdot r_1(\lambda) + r_2(\lambda) \quad (ii)$$

حيث يكون $r_2(\lambda) = 0$ أو أنه يكون من درجة أقل من درجة $r_1(\lambda)$. إذا كان $r_2(\lambda) = 0$ فإنه ينتج عن (i) أن

$$r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

ونحصل منها على (a) بأن نقسم على المعامل المتقدم فى $r_1(\lambda)$.

إذا كان $r_2(\lambda) \neq 0$ فإننا نجد :

$$r_1(\lambda) = q_3(\lambda) \cdot r_2(\lambda) + r_3(\lambda) \quad (iii)$$

حيث $r_3(\lambda) = 0$ أو يكون من درجة أدنى من درجة $r_2(\lambda)$. إذا كان $r_3(\lambda) = 0$ فإننا نحصل من (i) و (ii) على

$$r_2(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda) \cdot r_1(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda)[f(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot g(\lambda)]$$

$$= -q_2(\lambda) \cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)]g(\lambda)$$

ومنها نحصل على (a) بأن نقسم على المعامل المتقدم لـ $r_2(\lambda)$. إذا تابعتنا هذه الطريقة وفرضنا أن كل باقى جديد لايساوى

الصفر . فإننا نجد على وجه العموم :

$$r_i(\lambda) = q_{i+2}(\lambda) \cdot r_{i+1}(\lambda) + r_{i+2}(\lambda) \quad (iv)$$

علاوة على ذلك فإن هذه الطريقة تنتهى بـ

$$r_{s-2}(\lambda) = q_s(\lambda) \cdot r_{s-1}(\lambda) + r_s(\lambda), \quad q_s(\lambda) \neq 0 \quad (v)$$

$$r_{s-1}(\lambda) = q_{s+1}(\lambda) \cdot r_s(\lambda) \quad (vi)$$

من (vi) نجد أن $r_s(\lambda)$ يقسم $r_{s-1}(\lambda)$ ومن (v) فإنه يقسم أيضاً $r_{s-2}(\lambda)$ ونجد استناداً إلى (iv)

$$r_{s-3}(\lambda) = q_{s-1}(\lambda) \cdot r_{s-2}(\lambda) + r_{s-1}(\lambda)$$

أى أن $r_s(\lambda)$ يقسم $r_{s-3}(\lambda)$. وهكذا باستعادة المراحل المؤدية إلى (vi) ، نستنتج أن $r_s(\lambda)$ يقسم كلا

$$f(\lambda) \text{ و } g(\lambda) . \text{ إذا كان المعامل المتقدم لـ } r_s(\lambda) \text{ هو } c \text{ فإن } d(\lambda) = c^{-1} r_s(\lambda)$$

ونستنتج من (i) $r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot g(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_1(\lambda) \cdot g(\lambda)$ وبالتعميم في (ii) نجد :

$$r_2(\lambda) = -q_2(\lambda) \cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) = h_2(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_2(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

نستنتج من (iii) $r_3(\lambda) = r_1(\lambda) - q_3(\lambda) \cdot r_2(\lambda)$ وإذا عوضنا عن $r_1(\lambda)$ و $r_2(\lambda)$ فإننا نجد :

$$\begin{aligned} r_3(\lambda) &= [1 + q_2(\lambda) \cdot q_3(\lambda)]f(\lambda) + [-q_1(\lambda) - q_3(\lambda) - q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \cdot q_3(\lambda)]g(\lambda) \\ &= h_3(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_3(\lambda) \cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

وإذا تابعنا فإننا نجد في النهاية :

$$r_s(\lambda) = h_s(\lambda) \cdot f(\lambda) + k_s(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

أى : $d(\lambda) = c^{-1} r_s(\lambda) = c^{-1} h_s(\lambda) \cdot f(\lambda) + c^{-1} k_s(\lambda) \cdot g(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda)$.

بترك برهان أن $d(\lambda)$ وحيد كثرين .

٣ - أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(\lambda)$ لـ :

$$g(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2 \quad , \quad f(\lambda) = 3\lambda^5 + 7\lambda^4 + 11\lambda + 6$$

وعبر عن $d(\lambda)$ بالشكل المعطى في النظرية III .

نجد على التوالى :

$$f(\lambda) = (3\lambda + 1)g(\lambda) + (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) \quad (i)$$

$$g(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) + (\lambda^2 + 7\lambda + 10) \quad (ii)$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10) + (17\lambda + 34) \quad (iii)$$

و

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = \left(\frac{1}{17}\lambda + \frac{5}{17}\right)(17\lambda + 34) \quad (iv)$$

ان القاسم المشترك الأعظم هو : $\frac{1}{17}(17\lambda + 34) = \lambda + 2$

نستنتج من (iii) أن

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10)$$

لنموض عن $\lambda^2 + 7\lambda + 10$ من (ii)

$$\begin{aligned} 17\lambda + 34 &= (\lambda^2 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)[g(\lambda) - (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4)] \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda^2 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)g(\lambda) \end{aligned}$$

ولنموض عن $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$ من (i)

$$17\lambda + 34 = (\lambda^2 - 5\lambda + 7)f(\lambda) + (-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)g(\lambda)$$

أى :

$$\lambda + 2 = \frac{1}{17}(\lambda^2 - 5\lambda + 7) \cdot f(\lambda) + \frac{1}{17}(-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4) \cdot g(\lambda)$$

٤ - برهن أنه إذا كان القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(\lambda)$ من الدرجة $n < 0$ وكثير الحدود $g(\lambda)$ من الدرجة $m < 0$ لا يساوى الواحد فإنه يوجد كثيرا حدود لا يساويان صفر كثيرات الحدود ، $a(\lambda)$ درجته أقل من m و $b(\lambda)$ درجته أقل من n بحيث يكون :

$$a(\lambda) \cdot f(\lambda) + b(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0 \quad (8)$$

والمكس بالمكس .

لنفرض أن $d(\lambda) \neq 1$ هو القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيكون

$$g(\lambda) = d(\lambda) \cdot g_1(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) = d(\lambda) \cdot f_1(\lambda)$$

حيث $f(\lambda)$ من درجة أقل من n و $g(\lambda)$ من درجة أقل من m

الآن .

$$g_1(\lambda) \cdot f(\lambda) = g_1(\lambda) \cdot d(\lambda) \cdot f_1(\lambda) = g(\lambda) \cdot f_1(\lambda)$$

و

$$g_1(\lambda) \cdot f(\lambda) + [-f_1(\lambda) \cdot g(\lambda)] = 0$$

أى إذا أخذنا $a(\lambda) = g_1(\lambda)$ و $b(\lambda) = -f_1(\lambda)$ فإننا نحصل على (a).

على المكس ، لنفرض أن $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يكونان أوليين نسبياً وأن (a) صحيحة . ينتج عندئذ من النظرية IV أنه يوجد كثيرا حدود $h(\lambda)$ و $k(\lambda)$ بحيث يكون :

$$h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) = 1$$

وهكذا ، باستخدام (a) نستنتج أن :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a(\lambda) \cdot h(\lambda) \cdot f(\lambda) + a(\lambda) \cdot k(\lambda) \cdot g(\lambda) \\ &= -b(\lambda) \cdot h(\lambda) \cdot g(\lambda) + a(\lambda) \cdot k(\lambda) \cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

وأن $g(\lambda)$ يقسم $a(\lambda)$. ولكن هذا الأمر مستحيل . على ذلك إذا كانت العلاقة (a) محققة فإنه لا يمكن أن يكون $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ أوليين نسبياً .

٥ - برهن أنه يمكن كتابة كل كثير حدود غير صفري $f(\lambda)$ من $F[\lambda]$ بالشكل التالي :

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \cdots q_r(\lambda)$$

حيث $c \neq 0$ ثابت و $q_i(\lambda)$ كثير حدود واحد غير قابل للاختزال في $F[\lambda]$ لنكتب :

$$f(\lambda) = a_n \cdot f_1(\lambda) \quad (i)$$

حيث a_n المعامل المتقدم في $f(\lambda)$. إذا كان $f_1(\lambda)$ غير قابل للاختزال فإن (i) يحقق شروط هذه النظرية وإذا كان غير ذلك فإنه يوجد تحليل من الشكل :

$$f(\lambda) = a_n \cdot g(\lambda) \cdot h(\lambda) \quad (ii)$$

إذا كان كل من $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ غير قابل للاختزال ، فإن (ii) يحقق شروط النظرية . إذا كان خلاف ذلك فإن تحليلًا جديدًا يقود إلى مجموعة عوامل واحدة غير قابلة للاختزال .
لبرهان الواحدية نفرض أن :

$$a_n \cdot p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda) \quad , \quad a_n \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda)$$

تحليلان فيهما $r > s$. بما أن $q_1(\lambda)$ يقسم $p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ فإنه يجب أن يقسم واحداً من $p_i(\lambda)$ الذى . بتغيير الترقيم ، يمكن اعتباره $p_1(\lambda)$. بما أن $p_1(\lambda)$ واحدى وغير قابل للاختزال فإن $q_1(\lambda) = p_1(\lambda)$ وهكذا نجد أن $q_2(\lambda)$ يقسم $p_2(\lambda) \cdot p_3(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ ، وبعد أن نكرر ماثلاً سابقاً ، نجد أن $q_2(\lambda) = p_2(\lambda)$ ونجد في النهاية أن $q_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ لقيم $i = 1, 2, \dots, r$ وأن $p_{r+1}(\lambda) \cdot p_{r+2}(\lambda) \dots p_s(\lambda) = 1$. بما أن المساواة الأخيرة مستحيلة فإن $r=s$ وبذلك تكون قد برهنا الواحدية .

مسائل إضافية

٦ - أعط مثلاً تكون فيه درجة $f(\lambda) + g(\lambda)$ أقل من درجة $f(\lambda)$ أو درجة $g(\lambda)$

٧ - برهن النظرية III .

٨ - برهن أنه إذا قسم $f(\lambda)$ كلا من $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ فإنه يقسم $g(\lambda) \pm h(\lambda)$

٩ - أوجد شرطاً لازماً وكافياً لكي يكون كل من كثيرى الحدود غير الصفريين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ من $F[\lambda]$ قاسماً للأخر .

١٠ - عبر لكل ما يل عن القاسم المشترك الأعظم بالشكل الوارد في النظرية IV .

$$f(\lambda) = 2\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 4, \quad g(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 \quad (أ)$$

$$f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda + 6, \quad g(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 \quad (ب)$$

$$f(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1, \quad g(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (ج)$$

$$f(\lambda) = 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad (د)$$

الجواب :

$$\lambda^2 - 2 = -\frac{1}{3}(\lambda - 1)f(\lambda) + \frac{1}{3}(2\lambda^2 + 1)g(\lambda) \quad (أ)$$

$$\lambda - 3 = -\frac{1}{13}(\lambda + 4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(\lambda^2 + 5\lambda + 5)g(\lambda) \quad (ب)$$

$$\lambda + 1 = \frac{1}{13}(\lambda + 4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(-2\lambda^3 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 9)g(\lambda) \quad (ج)$$

$$1 = \frac{1}{102}(5\lambda + 2)f(\lambda) + \frac{1}{102}(-15\lambda^3 + 44\lambda^2 - 55\lambda + 45)g(\lambda) \quad (د)$$

١١ - برهن النظرية VI

إرشاد : افرض $d(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيكون $h(\lambda) = d(\lambda)$. وينتج عن ذلك أنه إما أن يكون $d(\lambda)$ أو $h(\lambda)$ ثابتاً .

١٢ - برهن النظريتين VII و VIII .

١٣ - برهن إذا كان $f(\lambda)$ أولياً نسبياً مع $g(\lambda)$ ويقسم $\alpha(\lambda) \cdot g(\lambda)$ فإنه يقسم $\alpha(\lambda)$.

١٤ - إن المضاعف المشترك الأصغر لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ هو كثير حدود واحد ويكون مضاعفاً لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ وتكون درجته أصغر مما يمكن . أوجد القاسم المشترك الأعظم (ق . م . ع .) و المضاعف المشترك الأصغر -

(م . م . ص) لكل من :

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 1, \quad g(\lambda) = \lambda^4 - 1 \quad (أ)$$

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda + 2), \quad g(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^3(\lambda - 3) \quad (ب)$$

$$\text{الجواب : (أ) ق . م . ع . } = \lambda - 1; \quad \text{و م . م . ص . } = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$\text{(ب) ق . م . ع . } = (\lambda + 1)(\lambda + 2); \quad \text{و م . م . ص . } = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^3(\lambda - 3)$$

$$١٥ - \text{ ليكن } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{برهن :}$$

$$(أ) \quad \phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0 \quad \text{و} \quad \phi(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0$$

$$(ب) \quad m(A) = 0 \quad \text{حيث} \quad m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

١٦ - أى خاصية من خواص الحقل ليست محققة من قبل نطاق كثيرات الحدود ؟

١٧ - نقول عن العدد c إنه جذر لكثير الحدود $f(\lambda)$ إذا كان $f(c) = 0$ برهن أن العدد c جذر لـ $f(\lambda)$ إذا

كان (وإذا كان فقط) ($\lambda - c$) عاملاً من عوامل $f(\lambda)$.

١٨ - نفرض أن $f(\lambda) = (\lambda - c)^k g(\lambda)$ (أ) برهن أن c جذر ذو تعددية ($k-1$) لـ $f'(\lambda)$.

(ب) برهن أن c جذر ذو تعددية $k < 1$ لـ $f(\lambda)$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) c جذراً لكل $f(\lambda)$ و $f'(\lambda)$.

١٩ - لنأخذ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ غير معلومين سوياً ، في $F[\lambda]$ ولنفرض أن قاسمهما المشترك الأعظم $d(\lambda)$.

ولنفرض أن K أى حقل يحوى F . برهن أنه إذا كان $D(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$

باعتبارهما في $K[\lambda]$ ، فإن $D[\lambda] = d[\lambda]$.

$$\text{إرشاد : لنفرض } f(\lambda) = s(\lambda) \cdot D(\lambda), \quad g(\lambda) = t(\lambda) \cdot D(\lambda), \quad d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

$$\text{و } D(\lambda) = c(\lambda) \cdot d(\lambda)$$

٢٠ - برهن أن مصفوفة مربعة A من الدرجة n تكون نظامية إذا كان من الممكن التعبير عن A^{-1} ككثير حدود

$$a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

في A .

الفصل الثالث والعشرون

المصفوفات لا مبدا

تعريف :

ليكن $F[\lambda]$ نطاق كثيرات الحدود المكونة من كل كثيرات الحدود في λ ذات المعاملات المنتمية إلى F . نسمي المصفوفة الغير صفرية ذات الدرجة $m \times n$ والمعرفة على F .

$$A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (23.1)$$

مصفوفة لا مبدا (مصفوفة λ).

لتكن p أعلى درجة لـ λ في كثيرات الحدود $a_{ij}(\lambda)$ الواردة في (23.1) يمكن كتابة $A(\lambda)$ ككثير حدود من الدرجة p بالنسبة لـ λ معاملاته مصفوفات نسميه كثير حدود مصفوفي.

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \quad (23.2)$$

حيث A_i مصفوفة معرفة على F من الدرجة $m \times n$

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5 \\ \lambda^3 - 4 & \lambda^3 - 3\lambda^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال ١ : إن :

مصفوفة λ أو كثير حدود مصفوفي من الدرجة الرابعة

إذا كانت $A(\lambda)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n . فإنها توصف بأنها شاذة أو غير شاذة حسبما يكون $|A(\lambda)|$ مساويا أو غير مساو للصفر. وتوصف $A(\lambda)$ فوق ذلك بأنها غير معتلة أو معتلة حسبما يكون A_p غير شاذة أو شاذة. إن كثير الحدود الوارد في المثال ١، غير شاذ ومعتل.

العمليات على مصفوفات لا مبدا :

لتكن مصفوفتا لا مبدا المربعتان ومن الدرجة n أو كثيرا الحدود المصفوفتين على $F(\lambda)$:

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \quad (23.3)$$

$$B(\lambda) = B_q \lambda^q + B_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0 \quad (23.4)$$

نقول عن المصفوفتين (23.3) و (23.4) إنهما متساويتان ، $A(\lambda) = B(\lambda)$ على شرط $A_i = B_i$ و $p = q$ لقيم $i = 0, 1, 2, \dots, p$.

إن المجموع $A(\lambda) + B(\lambda)$ هو مصفوفة لا مبدا $C(\lambda)$ تنتج من جمع كل عنصرين متناظرين من مصفوفتي λ

المفروضتين .

إن حاصل الضرب $A(\lambda) \cdot B(\lambda)$ هو مصفوفة لا مبدأ أو كثير حدود مصفوفى لا تزيد درجته عن $p + q$. إذا كان أى من $A(\lambda)$ أو $B(\lambda)$ غير شاذ فإن درجة $A(\lambda) \cdot B(\lambda)$ و $B(\lambda) \cdot A(\lambda)$ تساوى $p+q$ بالضبط.

لا تتغير المساواة (23.3) عندما نستعفى عن λ بمدد آخر k من F . فلو فرضنا مثلاً $\lambda = k$ فى (23.3) فإننا نجد :

$$A(k) = A_p k^p + A_{p-1} k^{p-1} + \dots + A_1 k + A_0$$

ولكننا ، لو أخطأنا λ بمصفوفة C مربعة من الدرجة n فإنه من الممكن أن نحصل على نتيجتين مختلفتين ويرجع ذلك لأنه ، فى الحالة العامة ، لا تكون مصفوفتين مربعيتين تبدليتين . تسمى بالتمريف .

$$A_R(C) = A_p C^p + A_{p-1} C^{p-1} + \dots + A_1 C + A_0 \quad (23.5)$$

$$A_L(C) = C^p A_p + C^{p-1} A_{p-1} + \dots + C A_1 + A_0 \quad (23.6)$$

وعلى الترتيب القيمة الدالية اليمنى والقيمة الدالية اليسرى لـ $A(\lambda)$.

مثال ٢ : لنفرض $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix}$$

القسمة : سنبرهن فى المسألة ٢ :

I. إذا كان $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ كثيرا الحدود المرفعين فى (23.3) و (23.4) وإذا كانت B_q مصفوفة غير شاذة ، فإنه يوجد بشكل وحيد أربع كثيرات حدود مصفوفية $Q_1(\lambda)$ ، $R_1(\lambda)$ ؛ $Q_2(\lambda)$ ، $R_2(\lambda)$ بحيث يكون كل من $R_1(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ إما صفراً أو من درجة أقل من درجة $B(\lambda)$ وبحيث يتحقق ما يلى :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (23.7)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \quad (23.8)$$

إذا كان $R_1(\lambda) = 0$ فإن $B(\lambda)$ يدعى قاسماً من اليمين لـ $A(\lambda)$ وإذا كان $A_2(\lambda) = 0$ فإن $B(\lambda)$ يدعى قاسماً من اليسار لـ $A(\lambda)$

مثال ٣ : إذا كان $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 \\ 2\lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix}$ و $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ 2\lambda & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda + 3 \\ -5\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda + 1 \\ \lambda - 1 & 1 \end{bmatrix} = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda)$$

ويكون هنا $B(\lambda)$ قاسما من اليسار لـ $A(\lambda)$

أنظر المسألة ٣

يسمى كثير الحدود المصفوفي ذا الشكل :

$$B(\lambda) = b_q \lambda^q \cdot I_n + b_{q-1} \lambda^{q-1} \cdot I_n + \dots + b_1 \lambda \cdot I_n + b_0 I_n = b(\lambda) \cdot I_n \quad (23.9)$$

بأنه عددي . إن كثير الحدود المصفوفي العددي $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I_n$ تبديل مع كل كثير حدود مصفوفي مربع من الدرجة n .

في (23.7) و (23.8) إذا كان $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I$ فإن :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (23.10)$$

مثال ٤ :

لنفترض أن $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda + 1 \\ \lambda^2 - 1 & 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$ و $B(\lambda) = (\lambda + 2)I_2$ فيكون :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

و

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

إذا كان $R_1(\lambda) = 0$ في (23.10) فإن $A(\lambda) = b(\lambda) \cdot I \cdot Q_1(\lambda)$ ويكون لدينا :

II. يقبل كثير حدود مصفوفي $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ من الدرجة n القسمة على كثير حدود مصفوفي

عددي $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I_n$ إذا كان (وإذا فقط) كل واحد من $a_{ij}(\lambda)$ يقبل القسمة على $b(\lambda)$

نظرية الباقي :

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة λ الواردة في (23-3) ولنفرض أن $B = [b_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n معرفة على F . بما أن $I - B$ غير شاذة فإنه يمكننا أن نكتب :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_1 \quad (23.11)$$

و

$$A(\lambda) = (\lambda I - B) \cdot Q_2(\lambda) + R_2 \quad (23.12)$$

حيث R_1 و R_2 خاليا من λ يمكن أن نبين :

III. إذا قسم كثير الحدود المصفوفي $A(\lambda)$ الوارد في (23.3) على $I - B$ حيث $B = [b_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ، حتى نحصل على الباقيين R_1 و R_2 الحاليتين من λ ، فإنه يكون :

$$R_1 = A_R(B) = A_p B^p + A_{p-1} B^{p-1} + \dots + A_1 B + A_0$$

و

$$R_2 = A_L(B) = B^p A_p + B^{p-1} A_{p-1} + \dots + B A_1 + A_0$$

مثال ٥ :

$$\text{لنفرض } 4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} \quad \lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} \text{ فيكون :}$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_1$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (\lambda I - B) Q_2(\lambda) + R_2$$

من المثال ٢ نجد أن $R_1 = A_R(B)$ و $R_2 = A_L(B)$ وذلك متفق مع النظرية III .
إذا كان $A(\lambda)$ كثير حدود مصفوفى عددي

$$A(\lambda) = f(\lambda) \cdot I = a_p I \lambda^p + a_{p-1} I \lambda^{p-1} + \dots + a_1 I \lambda + a_0 I$$

فإن الباقيين الواردين في (23.11) و (23.12) يكونان متطابقتين أى :

$$R_1 = R_2 = a_p B^p + a_{p-1} B^{p-1} + \dots + a_1 B + a_0 I$$

ونجد :

IV. إذا قسم كثير حدود مصفوفى عددي $f(\lambda) \cdot I_n$ على $\lambda I_n - B$ حتى نحصل على باقى القسمة R خالياً

من λ فإنه يكون $R = f(B)$

كنتيجة لما تقدم نجد :

V. يقبل كثير حدود مصفوفى عددي $f(\lambda) \cdot I_n$ القسمة على $\lambda I_n - B$ إذا كان (وإذا كان فقط) $f(B) = 0$

نظرية كايلي — هاميلتون :

اعتبر المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n . الذى تكون $\lambda I - A$ مصفوفته المميزة

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \quad \text{و} \quad \phi(\lambda) = 0 \text{ معادلته المميزة . نستنتج من (6.2) أن}$$

$$(\lambda I - A) \cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda) \cdot I$$

وهكذا نجد أن $\phi(\lambda) \cdot I$ قابل القسمة على $\lambda I - A$. ونستنتج من النظرية V . أن $\phi(A) = 0$ أى :

VI. كل مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ تحقق معادلتها المميزة $\phi(\lambda) = 0$

مثال ٦ :

$$\text{إن المعادلة المميزة لـ } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ هى } \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0 . \text{ الآن}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

أنظر المسألة ٤

مسائل اضافية

١ - المصفوفة $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 \\ \lambda + 1 & 1 \end{bmatrix}$ احسب $A_L(C)$ و $A_R(C)$ عندما يكون $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

أن $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ونجد : $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A_R(C) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ - برهن أنه إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتي لا مبدا الواردتين في (32.3) و (23.4) وإذا كانت B_q مصفوفة غير شاذة فإنه يوجد أربع كثيرات حدود مصفوفية وحيدة : $R_2(\lambda)$ و $Q_2(\lambda)$; $R_1(\lambda)$ و $Q_1(\lambda)$ حيث كل من $R_1(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ إما أن يكون صفراً أو من درجة أقل من درجة $B(\lambda)$ وبحيث يكون :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (i)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \quad (ii)$$

إذا كان $q > p$ فإن (i) تتحقق لـ $Q_1(\lambda) = 0$ و $R_1(\lambda) = A(\lambda)$ لنفرض أن $q \leq p$ فيكون :

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda) \lambda^{p-q} = C(\lambda)$$

حيث $C(\lambda)$ إما أن يساوى الصفر أو أن يكون من درجة لا تزيد عن $p - 1$.

إذا كان $C(\lambda)$ صفراً أو من درجة تقل عن q فإننا نجد (i) مع

$$R_1(\lambda) = C(\lambda) \quad \text{و} \quad Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1} \lambda^{p-q}$$

إذا كان $C(\lambda) = C_s \lambda^s + \dots$ حيث $q < s$ لنكون :

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda) \lambda^{p-q} - C_s B_q^{-1} B(\lambda) \lambda^{s-q} = D(\lambda)$$

إذا كان $D(\lambda)$ إما صفراً أو من درجة أقل من q فإننا نجد (i) مع

$$R_1(\lambda) = D(\lambda) \quad \text{و} \quad Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1} \lambda^{p-q} + C_s B_q^{-1} \lambda^{s-q}$$

أما خلاف هذا ، فإننا نتابع هذا العملية . بما أن هذا سيؤدي إلى متوالية من كثيرات الحدود المصفوفية متناقصة الدرجة ... $D(\lambda)$, $C(\lambda)$ فإننا نصل في النهاية إلى كثير حدود مصفوفى إما أن يكون معلوماً أو من درجة أدنى من q ونحصل على (i)

لكي نحصل على (ii) نبدأ من :

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_q^{-1} A_p \lambda^{p-q}$$

نترك إتمام البرهان وإثبات الوحدات كثيرين للقارىء .

أنظر المسألة ١ من الفصل ٢٢

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ -\lambda^2 + 2 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1 & \lambda^3 - \lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix} \quad \text{٣- إذا أعطيت}$$

أوجد المصفوفات $Q_1(\lambda), R_1(\lambda); Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$.

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \quad (\text{ب}) \quad A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda), \quad (\text{ا}) \quad \text{بحيث يكون}$$

كافى المسألة ٢ .

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^4 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{هنا}$$

(ا) لنحسب ما يلى :

$$A(\lambda) - A_4 B_2^{-1} B(\lambda) \lambda^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(\lambda)$$

$$C(\lambda) - C_3 B_2^{-1} B(\lambda) \lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D(\lambda) \quad ,$$

$$D(\lambda) - D_2 B_2^{-1} B(\lambda) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -13 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\lambda - 13 & 5\lambda + 3 \\ -2\lambda - 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} = R_1(\lambda)$$

$$Q_1(\lambda) = (A_4 \lambda^2 + C_3 \lambda + D_2) B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{فنجس :}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 2\lambda + 4 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

(ب) لنحسب ما يلى :

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} A_4 \lambda^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E(\lambda)$$

$$E(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} E_3 \lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F(\lambda)$$

$$F(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 8 & -\lambda + 4 \\ \lambda - 7 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = R_2(\lambda) \quad ,$$

$$\begin{aligned} Q_2(\lambda) &= B_2^{-1}(A_4\lambda^2 + E_3\lambda + F_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & 2\lambda + 2 \\ \lambda^2 + 6\lambda + 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

٤ - إذا أعطيت $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ استخدم حقيقة أن A تحقق معادلتها المميزة لحساب A^3 و A^4 وكذلك

بما أن A غير شاذة لحساب A^{-1} و A^{-2}

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ -3 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 11 = 0$$

وهكذا نجد :

$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = 3 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = 3 \begin{bmatrix} 42 & 31 & 29 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193 & 160 & 144 \\ 224 & 177 & 160 \\ 272 & 224 & 193 \end{bmatrix}$$

ومن $11I = -7A - 3A^2 + A^3$ فإن :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{11} \{-7I - 3A + A^2\} = \frac{1}{11} \left\{ -7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 13 & 8 & 8 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-2} &= \frac{1}{11} \{-7A^{-1} - 3I + A\} = \frac{1}{121} \left\{ -7 \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 33 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{121} \begin{bmatrix} -8 & -24 & 29 \\ 40 & -1 & -24 \\ -27 & 40 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

٥ - لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وأن $h(x)$ كثير حدود في x من الدرجة p .

$$|h(A)| = h(\lambda_1) \cdot h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n).$$

برهن أن

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (i)$$

لتفرض

$$h(x) = c(s_1 - x)(s_2 - x) \dots (s_p - x) \quad (ii)$$

فنتجد

$$h(A) = c(s_1 I - A)(s_2 I - A) \dots (s_p I - A)$$

$$\begin{aligned}
 |h(A)| &= c^p |s_1 I - A| \cdots |s_p I - A| \\
 &= \{c(s_1 - \lambda_1)(s_1 - \lambda_2) \dots (s_1 - \lambda_n)\} \\
 &\quad \cdot \{c(s_2 - \lambda_1)(s_2 - \lambda_2) \dots (s_2 - \lambda_n)\} \dots \{c(s_p - \lambda_1)(s_p - \lambda_2) \dots (s_p - \lambda_n)\} \\
 &= \{c(s_1 - \lambda_1)(s_2 - \lambda_1) \dots (s_p - \lambda_1)\} \\
 &\quad \cdot \{c(s_1 - \lambda_2)(s_2 - \lambda_2) \dots (s_p - \lambda_2)\} \dots \{c(s_1 - \lambda_n)(s_2 - \lambda_n) \dots (s_p - \lambda_n)\} \\
 &= h(\lambda_1) h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n)
 \end{aligned}$$

(ii) وذلك باستخدام

مسائل إضافية

٦- إذا أعطيت $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$ ، $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 + \lambda \\ \lambda + 1 & \lambda \end{bmatrix}$ فاحسب :

$$A(\lambda) + B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + 2\lambda & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda^2 + \lambda + 2 & 2\lambda - 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$A(\lambda) - B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda & -1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$A(\lambda) \cdot B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 \\ \lambda^4 + 2\lambda^2 - 1 & \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$B(\lambda) \cdot A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 - \lambda \\ 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda & 2\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

٧- إذا أعطيت $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$ ، $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ -\lambda^2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ فاحسب :

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_R(C) \cdot B_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 17 & -7 \end{bmatrix}, \quad B_R(C) \cdot A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_L(C) \cdot B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_L(C) \cdot A_L(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$P_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_L(C) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

حيث $Q(\lambda) = B(\lambda) \cdot A(\lambda)$ ، و $P(\lambda) = A(\lambda) \cdot B(\lambda)$

٨- إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتي لا مبدا مربعيتين من درجة n غير متثلتين ولنفرض أنهما على الترتيب من الدرجة p و q . وإذا كانت $C(\lambda)$ أى مصفوفة لا مبدا غير صفيرية فبرهن أن درجة مصفوفة حاصل ضرب هذه المصفوفات الثلاث بلئى ترتيب لا تقل عن $p + q$.

٩- لكل زوج من المصفوفات $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ الواردة أدناه ، أوجد المصفوفات $Q_1(\lambda), R_1(\lambda); Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$ المحققة للعلاقات (23.7) و (23.8)

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2 + \lambda & -\lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ -\lambda^2 + 2\lambda - 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 2\lambda + 1 & \lambda^4 + \lambda^2 + 7\lambda - 2 & 5\lambda^2 + 2\lambda + 4 \\ \lambda^4 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 & 3\lambda^3 + 2\lambda + 2 & 4\lambda^2 + 6\lambda + 1 \\ 2\lambda^3 - \lambda + 2 & \lambda^3 + 2\lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 & 3\lambda - 1 \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda + 1 \\ \lambda - 2 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^4 + \lambda^2 - 1 & \lambda^3 - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ \lambda^3 - \lambda^2 + 1 & \lambda^4 + \lambda^2 + 2 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda + 1 & 2\lambda^4 + \lambda - 2 \end{bmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda - 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 - 2\lambda \\ \lambda & \lambda - 2 & \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

الجواب :

$$(a) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda - 1 \\ -\lambda + 2 & -\lambda + 2 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$(b) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda - 1 \\ -\lambda + 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$(c) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda + 1 & \lambda^2 + 3 & -\lambda + 7 \\ \lambda^2 - 1 & 3\lambda + 5 & -3\lambda + 2 \\ 2\lambda - 3 & \lambda & \lambda - 6 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -16\lambda + 14 & -6\lambda - 3 & -5\lambda + 2 \\ -21\lambda + 4 & -2\lambda + 3 & \lambda - 5 \\ 5\lambda - 7 & 10\lambda + 3 & 18\lambda - 7 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \lambda^2 & 2 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = 0$$

$$(d) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 6\lambda + 31 & -3\lambda^2 - 5\lambda - 16 & 3\lambda^2 - 7\lambda + 8 \\ \lambda - 3 & \lambda^2 - \lambda - 1 & -\lambda^2 + 4\lambda - 7 \\ -2\lambda - 1 & 7 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 81\lambda + 46 & -12\lambda - 16 & -85\lambda - 23 \\ 4\lambda - 1 & 15\lambda - 9 & 12\lambda - 5 \\ -9\lambda - 8 & -7\lambda & 17\lambda - 2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 5\lambda + 31 & -\lambda^2 - \lambda - 4 & 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \lambda - 14 & \lambda^2 & -2\lambda^2 + 6\lambda - 6 \\ -3\lambda - 2 & 3 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 71\lambda + 46 & -12\lambda - 8 & -\lambda + 11 \\ -26\lambda - 30 & 11\lambda + 6 & 4\lambda - 4 \\ -15\lambda - 30 & 2\lambda + 4 & 16\lambda - 16 \end{bmatrix}$$

١٠- تحقق في (ب) من المسألة ٩ أن $R_1(\lambda) = AR(C)$ و $R_2(\lambda) = AL(C)$ حيث $B(\lambda) = \lambda I - C$

$$11- \text{ إذا كان } C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda \\ \lambda - 3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 3\lambda + 1 \\ \lambda - 2 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{bmatrix}$$

(أ) احسب : $A(\lambda) = B(\lambda) \cdot C(\lambda)$

(ب) أوجد $Q(\lambda)$ و $R(\lambda)$ من درجة لا تزيد على الواحد بحيث يكون $A(\lambda) = Q(\lambda) \cdot B(\lambda) + R(\lambda)$.

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda - 1 & \lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 1 \\ \lambda^3 - 5\lambda^2 + 11\lambda - 10 & \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 4 & \lambda + 3 \\ \lambda - 6 & \lambda - 1 \end{bmatrix} B(\lambda) + \begin{bmatrix} -9\lambda + 1 & -\lambda - 9 \\ 13\lambda - 6 & 9\lambda + 10 \end{bmatrix} \text{ الجواب}$$

١٢- إذا علمت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فاحسب كافي المسألة ٤ :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-3} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

١٣- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين متشابهتين وكان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددي فإن $g(A)$ و $g(B)$ يكونان متشابهين .

إرشاد : برهن أولاً أن A^k و B^k متشابهتان لأى عدد صحيح موجب k .

١٤- برهن أنه إذا كان $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ وكان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددي فإن

$$g(B) = \text{diag}(g(B_1), g(B_2), \dots, g(B_m))$$

١٥- برهن النظرية III .

إرشاد : حقق أن $I - B$ يقسم $A - AR(B)$

١٦- نقول عن المصفوفة C إنها جذر لكثير الحدود المصفوفي العددي $B(\lambda)$ الوارد في (23.9) فيما إذا كان $B(C) = 0$. برهن أن المصفوفة C تكون جذراً لـ $B(\lambda)$ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة المميزة لـ C تقسم $B(\lambda)$.

١٧- برهن أنه إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A وإذا كان $F(A)$ أى كثير حدود عددي في A ، فإن القيم

$$\text{الخاصة لـ } f(A) \text{ هي } f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n).$$

إرشاد : اكتب : $\lambda - f(x) = c(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_s - x)$ بحيث يكون

$$|\lambda I - f(A)| = c^n |x_1 I - A| \cdot |x_2 I - A| \dots |x_s I - A|.$$

$$|x_i I - A| = (x_i - \lambda_1)(x_i - \lambda_2) \dots (x_i - \lambda_n) \quad \text{الآن استعمل العلاقات}$$

$$c(x_1 - \lambda_j)(x_2 - \lambda_j) \dots (x_s - \lambda_j) = \lambda - f(\lambda_j). \quad \text{و}$$

$$18- \text{ أوجد القيم الخاصة لـ } f(A) = A^2 - 2A + 3. \text{ إذا علمت أن } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

١٩- أوجد النظرية الخاصة بالمسألة ٥ كنتيجة طبيعية للمسألة ١٧ .

٢٠- برهن أنه إذا كان X متجهيا لا متغيريا لمصفوفة المسألة ١٧ A ، فإن X يكون متجهيا لا متغيريا لـ $f(A)$.

٢١- لنفرض $A(t) = [a_{ij}(t)]$ حيث $a_{ij}(t)$ كثير حدود حقيقي للمتغير الحقيقي t . خذ :

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t+1 & t^4+2t^3+3t^2+5 \\ t^3-4 & t^3-3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} t^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

وفاضل الطرف الأخير كما لو كان كثير حدود معاملاته ثابتة لاقتراح التعريف :

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]$$

٢٢- أوجد صيفا لكل من

$$C = [c_{ij}] \text{ حيث } c \text{ عدد ثابت أو } \frac{d}{dt} \{cA(t)\}, \text{ (ب) } \frac{d}{dt} \{A(t) + B(t)\}; \text{ (أ)}$$

$$\frac{d}{dt} A^{-1}(t), \text{ (د) } \frac{d}{dt} \{A(t) \cdot B(t)\}; \text{ (ج)}$$

إرشاد : في حالة (ج) اكتب $A(t) \cdot B(t) = C(t) = [c_{ij}(t)]$

ثم فاضل $c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) b_{kj}(t)$ في حالة (د) استعمل العلاقة $A(t) \cdot A^{-1}(t) = I$.

الفصل الرابع والعشرون

شكل سميت النظامى

بالتحويلات الأولية :

على المصفوفة لابتدا $A(\lambda)$ على $F[\lambda]$ فإننا نعى :

(١) المبادلة بين الصفين ذوى الرقبن i و j ونرمز لذلك بالرمز H_{ij} ؛ المبادلة بين العمودين ذوى الرقبن i و j ونرمز له بالرمز K_{ij} .

(٢) ضرب الصف ذى الرقم i بثابت غير صفري k ونرمز لذلك بالرمز $H_i(k)$ ضرب العمود ذى الرقم i بثابت غير صفري k ونرمز له بالشكل $K_i(k)$.

(٣) إضافة حاصل ضرب كثير حدود $f(\lambda)$ من $F[\lambda]$ مع الصف رقم j للصف رقم i ونرمز لذلك بالرمز $H_{ij}(f(\lambda))$.

إضافة حاصل ضرب العمود رقم j و $f(\lambda)$ إلى العمود رقم i ويرمز لذلك بالرمز $K_{ij}(f(\lambda))$.

إن هذه التحويلات هي التحويلات الأولية الواردة في الفصل الخامس عدا التحويل . (٣) حيث كلمة عددى قد تغيرت وأصبحت كثير حدود . نرمز للتحويل الأول والمصفوفة الأولية التى نحصل عليها نتيجة لإجراء هذا التحويل الأول على I بنفس الرمز . وهكذا فإنه يمكن إجراء تحويل صفوف على $A(\lambda)$ بضربه من اليسار ، بمصفوفة مناسبة H كما أنه يمكن إجراء تحويل أعمدة على $A(\lambda)$ بضربه من اليمين بمصفوفة مناسبة K .

تمشيا مع الفصل الخامس نجد :

- I. أن لكل مصفوفة أولية من $F[\lambda]$ معكوساً هو أيضاً مصفوفة أولية من $F[\lambda]$
- II. إذا كان $|A(\lambda)| = k \neq 0$ حيث k من F فإن $A(\lambda)$ يكون حاصل ضرب مصفوفات أولية .
- III. لا تتغير رتبة مصفوفة λ من خلال تحويلات أولية .

نقول عن مصفوفتين λ مربعيتين ومن الدرجة n ، $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ عناصرهما من $F[\lambda]$ ، إنهما متكافئتين

فيما إذا وجد $P(\lambda) = H_s \dots H_2 \cdot H_1$ و $Q(\lambda) = K_1 \cdot K_2 \dots K_t$ بحيث يكون

$$B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda) \quad (24.1)$$

وهكذا نجد :

IV. أن المصفوفات λ من الدرجة $m \times n$ المتكافئة تكون ذات رتبة واحدة .

المجموعة القانونية :

سنرمز في المسألين ١ و ٢ ما يلي :

V. بفرض أن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتين متكافئتين رتبتهما r فإن القاسم المشترك الأعظم لجميع مصفورات $A(\lambda)$ المربعة من الدرجة s حيث $s \geq r$ هو أيضاً القاسم المشترك الأعظم لجميع مصفورات $B(\lambda)$ المربعة من الدرجة s .

سنبرهن في المسألة ٣ :

VI يمكن اختزال كل مصفوفة لا مبدا $A(\lambda)$ من الرتبة r بواسطة تحويلات أولية إلى شكل سميث النظامي التالي :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (24.2)$$

حيث $f_i(\lambda)$ كثير حدود واحد ويقسم $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, r-1)$. فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصنفات المربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$ حيث $r \geq s$ هو القاسم المشترك الأعظم لكل المصنفات المربعة من الدرجة s لـ $N(\lambda)$ وذلك استنادا إلى النظرية V.

بما أن في $N(\lambda)$ كل $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصنفات المربعة من الدرجة s لـ $N(\lambda)$ وبالتالي لـ $A(\lambda)$ هو :

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (24.3)$$

لنفرض أن $A(\lambda)$ قد اختزل إلى

$$N(\lambda) = \text{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

وإلى :

$$N_1(\lambda) = \text{diag}(h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

نجد من (24.3)

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_s(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda) \cdot \dots \cdot h_s(\lambda)$$

والآن $g_1(\lambda) = f_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, $g_2(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)$ ، $f_2(\lambda) = h_2(\lambda)$, ...، بحيث يكون

بصورة عامة إذا عرفنا $g_0(\lambda) = 1$ فإن :

$$g_s(\lambda)/g_{s-1}(\lambda) = f_s(\lambda) = h_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (24.4)$$

ونجد :

VII. تتعين المصفوفة $N(\lambda)$ المعرفة في (24.2) بشكل وحيد من المصفوفة المعطية $A(\lambda)$.

وهكذا فإن مصفوفات سميث النظامية تكون مجموعة قانونية بالنسبة للتكافؤ على $F[\lambda]$.

مثال ١ :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 \end{bmatrix} \quad \text{اعتبر}$$

إن من الواضح أن القاسم المشترك الأعظم للمصنفات ذات الصف الواحد (عناصر) من $A(\lambda)$ هو $g_1(\lambda) = 1$ وأن القاسم المشترك الأعظم للمصنفات ذات الصفين من $A(\lambda)$ هو $g_2(\lambda) = \lambda$ وأن $g_3(\lambda) = \frac{1}{2}|A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2$. وهكذا نجد من (24.2) أن :

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = g_2(\lambda)/g_1(\lambda) = \lambda, \quad f_3(\lambda) = g_3(\lambda)/g_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

وأن شكل سميث النظامي لـ $A(\lambda)$ هو :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

ولاختزال آخر أنظر المسألة ٤ :

العوامل اللامتغيرة :

تسمى كثيرات الحدود $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ الواقعة في قطر شكل سميث النظامي لـ $A(\lambda)$ عوامل لامتغيرة لـ $A(\lambda)$. إذا كان $f_k(\lambda) = 1$ حيث $r \geq k$ فإن $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \dots = f_k(\lambda) = 1$ وتسمى كل واحد من كثيرات الحدود هذه عاملا لامتغيراً تافهاً.

كنتيجة للنظرية VII نجد :

VIII. تكون مصفوفتا λ المربعتين من الدرجة n والمعرفة على $F[\lambda]$ متكافئتين على $F[\lambda]$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس العوامل اللامتغيرة.

القواسم الأولية :

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة لا مبدا مربعة ومن الدرجة n على $F[\lambda]$ ولنفرض أنه يمكن كتابة عواملها اللامتغيرة بالشكل التالي :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}} \dots \{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, (i = 1, 2, \dots, r) \quad (24.5)$$

حيث $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_s(\lambda)$ كثيرات حدود واحدة متباينة وغير قابلة للاختزال على $F[\lambda]$. إن بعض q_{ij}

يمكن أن يكون صفراً ويحذف في هذه الحالة المعامل المناظر ولكن بما أن $f_{i+1}(\lambda)$ يقسم $f_i(\lambda)$ فإن $q_{i+1,j} \leq q_{i,j}$ حيث $(i = 1, 2, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots, s)$

إن العوامل $\{p_j(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$ التي تظهر في (24.5) تسمى لاسماً أولياً على $F[\lambda]$ لـ $A(\lambda)$.

مثال ٢ :

لنفرض أن لمصفوفة λ مربعة $A(\lambda)$ ومن الدرجة 10 ، على حقل الأعداد الجذرية يكون له شكل سميث النظامي التالي :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & 0 & \\ \hline & & & 0 & & & 0 \end{array} \right]$$

إن رتبة هذا الشكل تساوي 5 وإن عوامله اللامتغيرة هي :

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= 1, & f_2(\lambda) &= 1, & f_3(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda^2+1), \\ f_4(\lambda) &= (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, & f_5(\lambda) &= (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) \end{aligned}$$

إن قواسمه الأولية هي :

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1), \lambda^2, \lambda, \lambda^2-3$$

نلاحظ أن القواسم الأولية ليست ، بالضرورة ، مختلفة . لقد كتب في القائمة السابقة كل مقسوم أولي كما يظهر غالبا في العوامل اللامتغيرة .

مثال ٣ :

(١) إن العوامل اللامتغيرة لـ $A(\lambda)$ الواردة في المثال ٢ لا تتغير على حقل الأعداد الحقيقية ولكن القواسم الأولية تأخذ الشكل :

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1), \lambda^2, \lambda, \lambda-\sqrt{3}, \lambda+\sqrt{3}$$

لأنه لا يمكن تحليل λ^2-3

(ب) على حقل الأعداد المركبة ، تبقى العوامل اللامتغيرة كما هي ، بينما تصبح القواسم الأولية كما يلي :

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda+i)^2, (\lambda+i)^2, \lambda+i, (\lambda-i)^2, (\lambda-i)^2, \lambda-i, \lambda^2, \lambda, \lambda-\sqrt{3}, \lambda+\sqrt{3}$$

إن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة λ تعين رتبتهما وقواسمها الأولية وعلى العكس فإن رتبة مصفوفة وقواسمها الأولية تعين عواملها اللامتغيرة .

مثال ٤ :

لنفرض أن القواسم الأولية للمصفوفة لا يبدأ $A(\lambda)$ المربعة ذات الدرجة السادسة والرتبة الخامسة هي :

$$\lambda^3, \lambda^2, \lambda, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda-1, (\lambda+1)^2, \lambda+1$$

أوجد العوامل اللامتغيرة لهذه المصفوفة ، واكتب شكل سميث القانوني لها .

لإيجاد $f(\lambda)$ وكون المضاعف المشترك الأصغر للقواسم الأولية أي :

$$f_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

ولإيجاد $f_4(\lambda)$ نحذف من قائمة القواسم الأولية تلك التي استعملت في تكوين $f_5(\lambda)$ ثم نوجد المضاعف المشترك الأصغر للقواسم الباقية فنجد :

$$f_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

نعيد الكرة (١-٢) $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$ فتكون بذلك قد استعملنا كل القواسم الأولية ونجد : $f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$ ويكون شكل سميث القانوني هو :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة λ تكون لامتغيرة من خلال تحويل أولي فإن القواسم الأولية تبقى كذلك كما هي بعد تحويل أولي : لهذا

IX. تكون مصفوفتا λ المربعتان ومن الدرجة n والمعرفتين على $F[\lambda]$ ، متكافئتين على $F[\lambda]$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة وكانت لهما نفس القواسم الأولية .

مسائل محلولة

١ - يبرهن أنه إذا كان $P(\lambda)$ حاصل ضرب مصفوفات أولية . فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$ إن من الضروري أن نعتبر فقط حالات $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ التي يكون فيها $P(\lambda)$ واحدا من المصفوفات الأولية الثلاثة H .

لنفرض أن $R(\lambda)$ مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$ ولنفرض أن $S(\lambda)$ مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ له نفس وضع $R(\lambda)$. ولنتبر $P(\lambda) = H_{ij}$ ، إن تأثير هذا التحويل على $A(\lambda)$ هو إما (i) أن يترك $R(\lambda)$ بدون تغيير وإما (ii) أن يبادل بين صفين من صفوف $R(\lambda)$ وإما (iii) أن يبادل بين صف من $R(\lambda)$ وصف آخر لا يقع في $R(\lambda)$. في الحالة (i) يكون $S(\lambda) = R(\lambda)$ ، وفي الحالة (ii) يكون $S(\lambda) = -R(\lambda)$ أما في الحالة (iii) فإن $S(\lambda)$ يساوى ، باهمال الإشارة ، مصفرا مربعا آخر من الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

اعتبر الآن $P(\lambda) = H_i(k)$ فيكون عندها إما $S(\lambda) = R(\lambda)$ أو $S(\lambda) = kR(\lambda)$.

لنتبر أخيراً $P(\lambda) = H_{ij}(f(\lambda))$ فيكون التأثير على $A(\lambda)$ واحدة من الحالات الآتية :

(i) يترك هذا التحويل $R(\lambda)$ كما هو بلا تغيير ، (ii) يضيف إلى واحد من صفوف $R(\lambda)$ حاصل ضرب $f(\lambda)$ بصف آخر من $R(\lambda)$. (iii) يضيف إلى صف من صفوف $R(\lambda)$ حاصل ضرب صف آخر ، غير واقع في $R(\lambda)$ في $R(\lambda)$. في الحالتين (i) و (ii) يكون $S(\lambda) = R(\lambda)$ أما في الحالة (iii) فيكون :

$$S(\lambda) = R(\lambda) \pm f(\lambda) \cdot T(\lambda)$$

حيث $T(\lambda)$ مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

وهكذا نجد أن كل مصفر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. $P(\lambda)$ هو تركيب خطي لمصفوفات مربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. إذا كان $g(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$ وإذا كان $g_1(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda) - P(\lambda)$ فيكون إذن $g(\lambda)$ قاسم لـ $g_1(\lambda)$. لنفرض أن $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$

الآن $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \cdot B(\lambda)$ و $P^{-1}(\lambda)$ هي حواصل مصفوفات أولية وينتج عن ذلك أن $g_1(\lambda)$ يقسم $g(\lambda)$ وأن $g_1(\lambda) = g(\lambda)$

٢ - يبرهن أنه إذا كان $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ هي حواصل ضرب مصفوفات أولية فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

لنفرض أن $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ و $C(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ بما أن $C'(\lambda) = Q'(\lambda) \cdot B'(\lambda)$ و $Q'(\lambda)$ هي حواصل ضرب مصفوفات أولية ، فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $C'(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $B'(\lambda)$ ولكن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $C'(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لجميع مصفوفات $C(\lambda)$ المربعة من درجة s . والأمر صحيح أيضا بالنسبة لكل من $B'(\lambda)$

و $B(\lambda)$. وهكذا نجد أن القاسم المشترك الأعظم لكل المضمرات المربعة ذات الدرجة s لـ $C(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ هو نفسه القاسم المشترك الأعظم لكل المضمرات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

٣- برهن على أن كل مصفوفة لا مبدا من الشكل $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ ومن الرتبة r يمكن اختزالها بتحويلات أولية إلى شكل سميث النظامي :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

حيث يكون كل $f_i(\lambda)$ واحديا و $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ حيث $(i = 1, 2, \dots, r-1)$

إن النظرية صحيحة في حالة $A(\lambda) = 0$ فلنفرض إذا أن $A(\lambda) \neq 0$ أى أنه يوجد عنصر $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ ومن أقل درجة . بواسطة تحويل من النوع ٢ ، يمكن جعل هذا العنصر واحديا وبالمبادلة المناسبة بين الصفوف والأعمدة يمكن وضع هذا العنصر في الموضع (1,1) في المصفوفة المفروضة ليصبح العنصر الجديد $a_{11}(\lambda)$

(١) لنفرض أن $a_{11}(\lambda)$ يقسم كل عنصر آخر من $A(\lambda)$. وينتج عن ذلك أن تحويلا من النوع (٣) يختزل المصفوفة $A(\lambda)$ إلى الشكل :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix} \quad (i)$$

حيث $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$

(ب) لنفرض أن $a_{11}(\lambda)$ لا يقسم كل عنصر من $A(\lambda)$ وأن $a_{1j}(\lambda)$ هو عنصر من الصف الأول لا يقبل القسمة على $a_{11}(\lambda)$. يمكننا استنادا إلى النظرية I من الفصل ٢٣ أن نكتب :

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$$

حيث $r_{1j}(\lambda)$ من درجة أقل من درجة $a_{11}(\lambda)$. لنطرح من العمود j حاصل ضرب $q(\lambda)$ بالعمود الأول بحيث يصبح العنصر الجديد الواقع في الصف الأول والعمود j هو $r_{1j}(\lambda)$. لنجعل بواسطة تحويل من النوع ٢ من العنصر واحديا وببديل بين الأعمدة ، نضعه في الموضع (1,1) ليصبح $a_{11}(\lambda)$ إذا كان الآن $a_{11}(\lambda)$ قاسما لكل عنصر من $A(\lambda)$ فإننا نستمر للحصول على (i) وإلا ، فبعد عدد محدود من تكرار هذه الطريقة ، سنحصل على مصفوفة يقبل كل عنصر واقع في الصف الأول والعمود الأول ، القسمة على العنصر الذي يحتل الموضع (1,1) .

إذا قسم هذا العنصر كل عنصر من $A(\lambda)$ فإننا نتبع الطريقة إلى أن نحصل على (i) وإلا فإننا نفرض أن $a_{ij}(\lambda)$ لا يقبل القسمة على $a_{11}(\lambda)$. لنفرض أن $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ و $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ لنطرح من الصف i الرقم i حاصل ضرب $q_{i1}(\lambda)$ بالصف الأول . إن هذا يحل الصفر محل $a_{i1}(\lambda)$. وبمثل $a_{1j}(\lambda) - q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$. فلنضع الآن الصف ذا الرقم i إلى الصف الأول . إن هذا العمل يبق $a_{11}(\lambda)$ كما كان بدون تغيير ولكنه يحل محل $a_{1j}(\lambda)$.

$$a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda) \{1 - q_{i1}(\lambda)\} a_{11}(\lambda)$$

بما أن هذا غير قابل للقسمة على $a_{11}(\lambda)$ فإننا نقسمه على $a_{11}(\lambda)$ ونجد كالسابق ، تعويضا آخر (الباقى) للعنصر $a_{11}(\lambda)$. نتابع هذه الطريقة حتى نحصل على كثير حدود واحد من كثيرات الحدود التى نختارها كنموذج $a_{11}(\lambda)$ لا يقسم عنصر من عناصر المصفوفة بـ عدد محدود من المراحل المشابهة لما سبق . نحصل على $a_{11}(\lambda)$ يقسم كل عنصر ونحصل من جديد على (i) .

وأخيرا إذا عاملنا $B(\lambda)$ بالطريقة السابقة ذاتها فسوف نحصل على :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

ونحصل فى النهاية على شكل سميث النظامي المطلوب .

بما أن $f_1(\lambda)$ هو قاسم لكل عنصر من $B(\lambda)$ و $f_2(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ فإن $f_1(\lambda)$ يقسم $f_2(\lambda)$ وبطريقة مشابهة نجد أن كل $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$.

٤ - اختزل :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 \end{bmatrix}$$

إلى شكل سميث النظامي لها .

ليس من الضروري أن نتبع هنا طريقة المسألة ٣ . إن العنصر $f_1(\lambda)$ من شكل سميث النظامي هو القاسم المشترك الأعظم لعناصر $A(\lambda)$ ومن الواضح أن هذا العنصر هو الواحد . سنعمل مباشرة بحيث يحتل هذا العنصر الموضع (1,1) وبذلك نحصل على العلاقة (i) للمسألة ٣ . بعد أن نطرح العمود الثانى من العمود الأول نحصل على :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ \lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ 0 & \lambda & \lambda^3 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ويكون الآن القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ هو λ . وهكذا يكون :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

وهو الشكل المطلوب .

٥ - اختزل .

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - 1 & \lambda + 2 \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda^2 - 2\lambda & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & \lambda^2 + \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

إلى شكل سميث النظامي لها .

نجد على التوالي :

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

وذلك باستعمال التحويلات الأولية : $K_{32}(-1); H_{21}(-\lambda), H_{31}(-\lambda+2); K_{21}(-\lambda+1), K_{31}(-\lambda-2); H_{23}(-1);$
 $K_{23}(1); H_{32}(\lambda+1), H_2(-1); K_{32}(-\lambda-1), K_3(-1).$

مسائل إضافية

- ٦- برهن أن : $H_{ij}K_{ij} = H_i(k)K_i(1/k) = H_{ij}(f(\lambda)) \cdot K_{ji}(-f(\lambda)) = I.$
- ٧- برهن أن مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ مربعة من درجة n تأخذ شكل حاصل ضرب مصفوفات أولية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|A(\lambda)|$ ثابتا غير صفري .
- ٨- برهن أنه يمكن اختزال مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المربعة من الدرجة n إلى I بواسطة تحويلات أولية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|A(\lambda)|$ ثابتا غير صفري .
- ٩- برهن أنه يكون لمصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المعروفة على $F[\lambda]$ معكوسا عناصره من $F[\lambda]$ إذا كانت (وإذا كانت فقط) $A(\lambda)$ حاصل ضرب مصفوفات أولية .
- ١٠- أوجد مصفوفتين $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث يكون $P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda) = I$ ثم أوجد بعدها :

$$A(\lambda)^{-1} = Q(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

علما أن :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \\ -\lambda & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix} \quad \text{إرشاد : أنظر في المسألة ٦ من الفصل الخامس . الجواب}$$

١١- اختزل كل مصفوفة مما يلي إلى شكل سميث النظامي لها .

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-2\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 2\lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2-\lambda-2 & 3\lambda^2-7\lambda+4 & 2\lambda^2-5\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & 2\lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^3 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^3+\lambda^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda-2 & \lambda^2+3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 3\lambda+1 & 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 3\lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda+4 & \lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+3 \end{bmatrix} \sim I_4 \quad (هـ)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix} \quad (و)$$

١٢- أوجد القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية وحقل الأعداد الحقيقية وحقل الأعداد المركبة لكل واحدة من المصفوفات الواردة في المسألة ١١ .

١٣- إن كثيرات الحدود التالية هي عوامل لا متغيرة غير تافهة لمصفوفة . أوجد قواسمها الأولية في حقل الأعداد الحقيقية .

$$\lambda^2 - \lambda, \lambda^3 - \lambda^2, \lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4 \quad (أ)$$

$$\lambda+1, \lambda^2-1, (\lambda^2-1)^2, (\lambda^2-1)^3 \quad (ب)$$

$$\lambda, \lambda^3+\lambda, \lambda^7-\lambda^6+2\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2 \quad (ج)$$

$$\lambda, \lambda^3+\lambda, \lambda^5+2\lambda^3+\lambda, \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda \quad (د)$$

الجواب :

$$\lambda^4, \lambda^2, \lambda, (\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1 \quad (أ)$$

$$\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3 \quad (ب)$$

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, \lambda-1 \quad (ج)$$

$$\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, \lambda+1 \quad (د)$$

١٤- إن كثيرات الحدود الآتية هي قواسم أولية لمصفوفة رتبها ستة : ما هي عواملها اللامتغيرة .

$$(\lambda-1)^3, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda-1, (\lambda+1)^2 \quad (ج) \quad \lambda, \lambda, \lambda+1, \lambda+2, \lambda+3, \lambda+4 \quad (أ)$$

$$\lambda^5, \lambda^3, \lambda, (\lambda+2)^5, (\lambda+2)^4, (\lambda+2)^2 \quad (د) \quad \lambda^3, \lambda^2, \lambda, (\lambda-1)^2, \lambda-1 \quad (ب)$$

الجواب :

$$1, 1, 1, 1, \lambda, \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) \quad (أ)$$

$$1, 1, 1, \lambda, \lambda^2(\lambda-1), \lambda^3(\lambda-1)^2 \quad (ب)$$

$$1, 1, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2 \quad (ج)$$

$$1, 1, 1, \lambda(\lambda+2)^2, \lambda^3(\lambda+2)^4, \lambda^5(\lambda+2)^5 \quad (د)$$

١٥ - حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية العادية :

$$\begin{cases} Dx_1 + (D+1)x_2 = 0 \\ (D+2)x_1 - (D-1)x_3 = t \\ (D+1)x_2 + (D+2)x_3 = e^t \end{cases}$$

حيث x_1, x_2, x_3 دوال حقيقية مجهولة لمتغير حقيقي t ، وحيث $D = \frac{d}{dt}$

إرشاد : يمكن كتابة هذه المجموعة برموز المصفوفات بالشكل :

$$AX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

والآن تعامل كثيرات الحدود في D الموجودة في A كما تعامل كثيرات الحدود في λ في مصفوفة λ .

بعد ما تقدم نبداً بإيجاد شكل يشبه شكل المسألة ٦ في الفصل الخامس ونستعمل بالترتيب الوارد التحويلات الأولية :

$$K_{12}(-1), H_1(-1), K_{21}(D+1), H_{21}(-D-2), H_{31}(D+1), K_{23}(D), H_{23}(-4), K_2(\frac{1}{2}), K_{32}(5D+7), H_{32}(-\frac{1}{2}D), H_3(2), K_3(1/5)$$

لنحصل على :

$$PAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = N_1$$

وهو شكل سميت النظامي لـ A .

نستعمل التحويل الخطي $X = QY$ لتحويل $AX = H$ إلى $AQY = H$

ومن العلاقة $PAQY = N_1Y = PH$ نجد :

$$(D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5})y_3 = 6e^t - 1 \quad , \quad y_1 = 0, \quad y_2 = t - 4e^t,$$

$$y_3 = K_1 e^{-4t/5} + K_2 e^{-t} + \frac{5}{3}e^t - \frac{5}{4}, \quad ,$$

نستعمل أخيراً التحويل $X = QY$ لكي نحصل على الحل المطلوب :

$$x_1 = 3C_1 e^{-4t/5} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{8}, \quad x_2 = 12C_1 e^{-4t/5} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}, \quad x_3 = -2C_1 e^{-4t/5} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}$$

الفصل الخامس والعشرون

كثيرات الحدود الأدنى لمصفوفة

المصفوفة المميزة :

إن المصفوفة المميزة $\lambda I - A$ لمصفوفة مربعة A على F من الدرجة n هي مصفوفة لا مبدا غير شاذة ذات عوامل لا متغيرة وقواسم أولية باستخدام (24.4) يسهل علينا برهانها ما يلي :

I. إذا كانت D مصفوفة قطرية فإن القواسم الأولية لـ $\lambda I - D$ هي عناصرها القطرية .
سنبرهن في المسألة :

II. تكون مصفوفتان A و B مربعتان من الدرجة n ومعرفتان على F متشابهتين على F فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) لمصفوفتيها المميزتين نفس العوامل اللامتغيرة أو إذا كان لهما رتبة واحدة والقواسم الأولية ذاتها في $F[\lambda]$.

يستنتج من النظريتين I و II

III. تكون مصفوفة مربعة A من الدرجة n ومعرفة على F ، مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كان (وإذا كان فقط) لـ $\lambda I - A$ قواسم أولية خطية في $F[\lambda]$.

لا متغيرات تشابهية :

تسمى العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - A$ ، لامتغيرات تشابهية لـ A .
لتكن $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ مصفوفتين غير شاذتين بحيث يكون $P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)$ شكل سميث النظام .
 $\text{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_m(\lambda))$

$$|P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)| = |P(\lambda)| \cdot |Q(\lambda)| \phi(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \dots \cdot f_m(\lambda) \quad - \text{والآن :}$$

بما أن $\phi(\lambda)$ و $f_i(\lambda)$ واحدانيان ، فإن $|P(\lambda)| \cdot |Q(\lambda)| = 1$ ويكون :

IV - إن كثير الحدود المميز لمصفوفة A مربعة ومن الدرجة n هو حاصل ضرب العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - A$ أو اللامتغيرات التشابهية لـ A .

كثير الحدود الأدنى :

ينتج عن نظرية كاييل - هاملتون (الفصل ٢٣) أن كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n تحقق معادلتها المميزة $\phi(\lambda) = 0$ ذات الدرجة n . يسمى كثير الحدود الواحدى $m(\lambda)$ ذو الدرجة الدنيا بحيث يكون $m(A) = 0$ كثير الحدود الأدنى لـ A وتسمى $m(\lambda) = 0$ المعادلة الصغرى لـ A . (يسمى $m(\lambda)$ أيضا الدالة الصغرى للمصفوفة A)
إن معظم الطرق الأولية المتبعة لإيجاد كثير الحدود الأدنى لـ $A \neq 0$ تنطوي على الروتين التالي .

$$(i) \text{ إذا كان } A = a_0 I \text{ فإن } m(\lambda) = \lambda - a_0 ;$$

$$(ii) \text{ إذا كان } A \neq aI \text{ لكل } a \text{ ولكن } A^2 = a_1 A + a_0 I \text{ فإن } m(\lambda) = \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 ;$$

(iii) إذا كان $A^2 \neq aA + bI$ لكل a و b ولكن $A^3 = a_2A^2 + a_1A + a_0I$ ، فإن :

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

وهكذا

مثال ١ :

أوجد كثير الحدود الأدنى لـ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

من الواضح أن $A - a_0I = 0$ مستحيل . ضع :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باستعمال العنصرين الأولين من الصف الأول من كل من هذه المصفوفات فنجد :

$$\begin{cases} 9 = a_1 + a_0 \\ 8 = 2a_1 \end{cases}$$

أى $a_1 = 4$ و $a_0 = 5$. وبعد (ليس قبل) أن نتحقق لكل عنصر من عناصر A^2 يمكننا أن نستنتج أن

$$A^2 = 4A + 5I$$

سنبرهن في المسألة ٢ :

V. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n على F وكان $f(\lambda)$ أى كثير حدود على F فإن $f(A) = 0$

إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A قاسماً لـ $f(\lambda)$

سنبرهن في المسألة ٣ :

VI. إن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة مربعة A من الدرجة n هو اللامتغير المتشابهى $f_n(\lambda)$ لـ A

ذى الدرجة الأعلى .

بما أن اللامتغيرات المتشابهية $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_{n-1}(\lambda)$ تقسم كلها $f_n(\lambda)$ فإنه يكون :

VII. إن كثير الحدود المميز $\phi(\lambda)$ لـ A هو حاصل ضرب كثير الحدود الأدنى لـ A وعوامل واحدة

معينة لـ $m(\lambda)$

و :

VIII. إن المصفوفة المميزة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n قواسم أولية خطية متباينة فيما إذا كان (وإذا كان فقط)

لكثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A عوامل خطية متباينة فقط .

المصفوفات غير المتردية :

نقول عن مصفوفة A مربعة من الدرجة n إنها غير متردية فيما إذا كان كثير الحدود المميز وكثير الحدود الأدنى لها

متطابقين ونقول عنها في الحالة المخالفة مصفوفة متردية ويكون :

IX. تكون مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n غير متردية ، فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لها لامتنيراً

تشابهاً غير تافه واحد فقط .

ومن السهل البرهان على :

X. إذا كان لـ B_1 و B_2 كثير الحدود الأدنى $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$ على الترتيب ، فإن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$

للمجموع المباشر $D = \text{diag}(B_1, B_2)$ هو المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$

يمكن تمديد هذه النتيجة على المجموع المباشر لـ m مصفوفة .
 XI. لتكن $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \dots, g_m(\lambda)$ كثيرات حدود واحدة متباينة وغير قابلة للاختزال من $F[\lambda]$ ولنفرض
 $|\lambda I - A_j| = \{g_j(\lambda)\}^{a_j}, (j = 1, 2, \dots, m)$. أن A_j مصفوفة غير متردبة بحيث يكون
 $B = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ يكون لها $\phi(\lambda) = \{g_1(\lambda)\}^{a_1} \cdot \{g_2(\lambda)\}^{a_2} \dots \{g_m(\lambda)\}^{a_m}$ كثير حدود أدنى وكثير حدود مميز في نفس الوقت .

المصفوفة الرفيعة :

لتكن A مصفوفة غير متردبة ذات لا متغير تشابهي غير تافه .
 $g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (25.1)
 تعرف المصفوفة الرفيعة $g(\lambda)$ بما يلي :

$$C(g) = [-a], \quad \text{if } g(\lambda) = \lambda + a \quad (25.2)$$

ولقيم $n < 1$ يكون :

$$C(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

سنبرهن في المسألة ٤ ما يلي :

XII. إن المصفوفة الرفيعة $C(g)$ لكثير حدود $g(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى يساويان في وقت معا $g(\lambda)$ (يفضل مؤلفون آخرون تعريف $C(g)$ بمنقول المصفوفة الواردة في (25.3) سنستعمل في هذا الكتاب هاتين الصيغتين) .

من السهل البرهان على ما يلي :

XIII. إذا كانت A مصفوفة غير متردبة ذات لا متغير تشابهي غير تافه ، فإن $f_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$.

$$I = [a] \quad \text{إذا كانت } n = 1 \text{ ، و } J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \text{ ، إذا كانت } n < 1 \quad (25.4)$$

يكون $F_n(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى له

مسائل محلولة

١ - برهن أن مصفوفتين A و B مربعيتين من الدرجة n ومعرفتين على F تكونان متشابهتين على F فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لمصفوفتهما المميزتين نفس العوامل اللامتغيرة أو إذا كان لهما نفس القواسم الأولية في $F[\lambda]$ لنفرض أن A و B متشابهتان نستنتج من العلاقة (i) للمسألة ١ ، الفصل ٢٠ ، أن $I - A$ و $I - B$ متكافئتان . ويتبع عن هذا استنادا إلى النظريتين VIII و IX من الفصل ٢٤ أن لهما نفس العوامل اللامتغيرة والقواسم الأولية نفسها

على العكس ، لنفرض أن $\lambda I - A$ و $\lambda I - B$ الموامل اللامتغيرة نفسها أو القواسم الأولية ذاتها .
إن هذا يؤدي استنادا إلى النظرية VIII . من الفصل ٢٤ إلى أنه يوجد مصفوفتا لا مبدا غير شاذتين $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث يكون :

$$P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda) = \lambda I - B \quad \text{أو}$$

$$P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) = (\lambda I - B) \cdot Q^{-1}(\lambda) \quad (i)$$

لنفرض :

$$P(\lambda) = (\lambda I - B) \cdot S_1(\lambda) + R_1 \quad (ii)$$

$$Q(\lambda) = S_2(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_2 \quad (iii)$$

$$Q^{-1}(\lambda) = S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + R_3 \quad (iv)$$

حيث R_1 و R_2 و R_3 خالية من λ . لنموض في (i) فنجد :

$$(\lambda I - B) \cdot S_1(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + R_1(\lambda I - A) = (\lambda I - B) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + (\lambda I - B) R_3 \quad \text{أو}$$

$$(\lambda I - B) \{ S_1(\lambda) - S_3(\lambda) \} (\lambda I - A) = (\lambda I - B) R_3 - R_1(\lambda I - A) \quad (v)$$

وهكذا نجد $S_1(\lambda) - S_3(\lambda) = 0$ و

$$(\lambda I - B) R_3 = R_1(\lambda I - A) \quad (vi)$$

وذلك لأنه ، في الحالة المعاكسة سيكون الطرف الأيسر من (v) من درجة لا تقل عن الدرجة الثانية بينما درجة الطرف الأيمن منها لا تزيد عن الدرجة الأولى .

إذا استخدمنا (iii) و (iv) و (vi) فإننا نجد :

$$\begin{aligned} I &= Q(\lambda) \cdot Q^{-1}(\lambda) \\ &= Q(\lambda) \{ S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + R_3 \} \\ &= Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + \{ S_2(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_2 \} R_3 \\ &= Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + S_2(\lambda) \cdot (\lambda I - B) R_3 + R_2 R_3 \\ &= Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) \cdot (\lambda I - A) + S_2(\lambda) \cdot R_1 \cdot (\lambda I - A) + R_2 R_3 \end{aligned}$$

أو

$$I - R_2 R_3 = \{ Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda) \cdot R_1 \} (\lambda I - A) \quad (vii)$$

والآن $I = R_2 R_3$ و $Q(\lambda) \cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda) R_1 = 0$ وذلك لأنه في الحالة المعاكسة سيكون الطرف الأيسر من (vii) من الدرجة صفر بالنسبة λ بينما تكون درجة الطرف الأيمن مساوية الواحد على الأقل . أي أن $R_3 = R_2^{-1}$ ونستنتج من (vi) :

$$\lambda I - B = R_1(\lambda I - A) R_2 = \lambda R_1 R_2 - R_1 A R_2$$

بما أن A و B و R_1 و R_2 خالية λ فإن $R_1 = R_2^{-1}$ وهكذا $\lambda I - B = \lambda I - R_2^{-1} A R_2$ وإن A و B متشابهان وهو المطلوب إثباته .

٢ - برهن ما يلي : إذا كانت A هي أى مصفوفة مربعة من الدرجة n على F وكان $f(\lambda)$ كثير حدود في $F[\lambda]$

فإن $f(A) = 0$ إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A قاسماً لـ $f(\lambda)$. نستنتج من طريقة التقسيم الواردة في الفصل ٢٢ .

$$f(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) + r(\lambda)$$

وينتج عن ذلك أن :

$$f(A) = q(A) \cdot m(A) + r(A) = r(A)$$

لنفرض أن $f(A) = 0$ فينتج أن $r(A) = 0$. الآن إذا كان $r(\lambda) \neq 0$ فإن درجته تقل عن درجة $m(\lambda)$ وهذا يخالف لما فرضناه من كون $m(\lambda)$ هو كثير الحدود الأدنى لـ A فلا بد إذن أن يكون $r(\lambda) = 0$ وأن $m(\lambda)$ قاسماً لـ $f(\lambda)$.

لبرهان العكس ، نفرض $f(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda)$ ويكون $f(A) = q(A) \cdot m(A) = 0$.

٣- برهن ما يلي : أن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة مربعة A من الدرجة n هو اللاتغير التشابهي $f_n(\lambda)$ لـ A ذي الدرجة الأعلى .

لنرمز بالرمز $g_{n-1}(\lambda)$ للقاسم المشترك الأعظم للمصفوفات المربعة ذات الدرجة $(n-1)$ للمصفوفة $I - A$ فيكون :

$$|\lambda I - A| = \phi(\lambda) = g_{n-1}(\lambda) \cdot f_n(\lambda)$$

و

$$\text{adj}(\lambda I - A) = g_{n-1}(\lambda) \cdot B(\lambda)$$

حيث القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ هو الواحد .

$$(\lambda I - A) \cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda) \cdot I$$

$$(\lambda I - A) \cdot g_{n-1}(\lambda) \cdot B(\lambda) = g_{n-1}(\lambda) \cdot f_n(\lambda) \cdot I$$

أو

$$(\lambda I - A) \cdot B(\lambda) = f_n(\lambda) \cdot I \quad (i)$$

وهكذا نجد أن $I - A$ قاسم لـ $f_n(\lambda)$. واستناداً إلى النظرية ٧ من الفصل ٢٣ يكون $f_n(A) = 0$. استناداً إلى النظرية ٧ نجد أن $m(\lambda)$ يقسم $f_n(\lambda)$. لنفرض :

$$f_n(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) \quad (ii)$$

بما أن $m(A) = 0$ فإن $I - A$ يكون قاسماً لـ $m(\lambda)$. فلنفرض :

$$m(\lambda) \cdot I = (\lambda I - A) \cdot C(\lambda)$$

وباستخدام العلاقتين (i) و (ii) لنجد :

$$(\lambda I - A) \cdot B(\lambda) = f_n(\lambda) \cdot I = q(\lambda) \cdot m(\lambda) \cdot I = q(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot C(\lambda)$$

و

$$B(\lambda) = q(\lambda) \cdot C(\lambda)$$

الآن أن $q(\lambda)$ يقسم كل عنصر من $B(\lambda)$ أي أن $q(\lambda)$ واستناداً إلى (ii) نجد .

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)$$

وهو المطلوب برهانه .

٤- برهن أن المصفوفة $C(g)$ الرفيعة لكثير الحدود $g(\lambda)$ يكون لها $g(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى في نفس الوقت .

إن المصفوفة المميزة لـ (25.3) هي :

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

لنضف إلى العمود الأول العمود الثاني مضروباً في λ والعمود الثالث مضروباً في λ^2 والعمود الأخير مضروباً في λ^{n-1} فنجد

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ g(\lambda) & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

بما أن $|G(\lambda)| = g(\lambda)$ فإن كثير الحدود المميز لـ $C(g)$ هو $g(\lambda)$. بما أن مصغر العنصر $g(\lambda)$ في $G(\lambda)$ هو ± 1 ، فإن القاسم المشترك الأكبر لكل المصفورات ذات الدرجة $(n-1)$ لـ $G(\lambda)$ هو 1 وهكذا نجد أن $C(g)$ مصفوفة غير مترتبة . كثير حدودها الأدنى $g(\lambda)$.

• - إن المصفوفة الرفيعة لكثير الحدود $g(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 5$ هو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{وإذا أردنا} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

مسائل إضافية

٦- اكتب المصفوفة الرفيعة لكل من كثيرات الحدود التالية :

- | | | | |
|--|------|--|-----|
| $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$ | (د) | $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$ | (أ) |
| $\lambda^2(\lambda^2 + 1)$ | (هـ) | $(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2)$ | (ب) |
| $(\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8)$ | (و) | $(\lambda - 1)^3$ | (ج) |

الجواب :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (و)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

٧- برهن أن كل مصفوفة من الدرجة الثانية $A = [a_{ij}]$ التي يكون لها $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$ هي مصفوفة غير متردية .

٨- اختزل $G(\lambda)$ الواردة في المسألة ٤ إلى $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, g(\lambda))$.

٩- لكل من المصفوفات A الواردة أدناه ، (i) أوجد كثير الحدود الأدنى والمميز و (ii) أعط قائمة بالعوامل اللامتغير (ع . لا متغيرا) وغير التافهة والقواسم الأولية (ق . ا .) في حقل الأعداد الجذرية .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (هـ) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (ا)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ح) \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (و) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (و)$$

الجواب :

(ا) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; ع . لا متغيرا $(\lambda-1), (\lambda-2), (\lambda-3)$ ق. ا . ; $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

(ب) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3$; ع . لا متغيرا = ق. ا . λ^3

(ج) $\phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$; ع . لا متغيرا $\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2)$ ق. ا . $m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$; $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-2$

(د) $\phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$; ع . لا متغيرا $\lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-5)$ ق. ا . $m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5)$; $\lambda+1, \lambda+1, \lambda-5$

(هـ) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2$; ع . لا متغيرا $\lambda, \lambda^2 - 4\lambda$ ق. ا . $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$; $\lambda, \lambda, \lambda-4$

(و) $\phi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$; ع . لا متغيرا $\lambda+1, \lambda^3 - \lambda$ ق. ا . $m(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)$; $\lambda, \lambda+1, \lambda+1, \lambda-1$

(ز) $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2$; ع . لا متغيرا $\lambda, \lambda(\lambda+1)^2$ ق. ا . $m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$; $\lambda, \lambda, (\lambda+1)^2$

(ح) $\phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 2)^2$; ع . لا متغيرا $\lambda-2, \lambda^2 - \lambda - 2, \lambda^2 - \lambda - 2$ ق. ا . $m(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$; $\lambda-2, \lambda-2, \lambda-2, \lambda+1, \lambda+1$

١٠- برهن النظريتين VII و VIII

١١- برهن النظرية X

إرشاد : إن $m(D) = \text{diag}(m(B_1), m(B_2)) = 0$ يتطلب أن يكون $m(B_1) = m(B_2) = 0$ أي أن $m_1(\lambda)$

و $m_2(\lambda)$ يقسمان $m(\lambda)$

١٢- برهن النظرية XI

١٣- إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^k = 0$ فإن A

تسمى مصفوفة معلومة القوى من الدليل k .

برهن أن A تكون معدومة القوى من الدليل k إذا كانت (وإذا كانت فقط) قيمها الخاصة كلها أصفارا .

١٤- برهن (أ) أن القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ومتساوية القوى تكون مساوية إما إلى الصفر أو إلى الواحد .

(ب) إن رتبة A تساوى عدد القيم الخاصة المساوية للواحد .

١٥- برهن ما يلي : إذا فرضنا أن A, B, C, D مصفوفات على F مربعة من الدرجة n ونفرض أن C و D غير شاذتين فإنه توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون $PCQ = A$, $PDO = B$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $L = \lambda C - A$ و $R(\lambda) = \lambda D - B$ نفس العوامل اللامتغيرة أو القواسم الأولية ذاتها .
إرشاد : اتبع البرهان الوارد في المسألة ١ ولاحظ التشابه قد استمض عنه هنا بالتفكاك .

١٦- برهن أنه إذا كان كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة A غير شاذة من الدرجة s فإنه يمكن التمييز عن A^{-1} بكثير حدود عددي لـ A من الدرجة $s - 1$.

١٧- استعمل كثير الحدود الأدنى لإيجاد معكوس المصفوفة A الواردة في المسألة ٩ (ج) .

١٨- برهن أن كل عامل خطي $\lambda_i - \lambda$ من $\phi(\lambda)$ هو عامل لـ $m(\lambda)$

إرشاد : هذه النظرية تنتج من النظرية VII

أو افرض العكس و اكتب $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)q(\lambda) + r$ حيث $r \neq 0$ فيكون $(A - \lambda_i I)q(A) + rI = 0$ وهكذا نجد أن لـ $A - \lambda_i I$ معكوساً .

١٩- استعمل $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لكي تبرهن أن كثير الحدود الأدنى ليس حاصل ضرب العوامل المتباينة لـ $\phi(\lambda)$

٢٠- برهن ما يلي إذا كان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددي في λ فإن $g(A)$ تكون شاذة إذا كان (وإذا كان فقط) القاسم المشترك الأعظم لـ $g(\lambda)$ و $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لـ A يكون $1 \neq d(\lambda)$.
إرشاد : (i) افرض $d(\lambda) \neq 1$ واستعمل النظرية V من الفصل ٢٢ .
(ii) افرض $d(\lambda) = 1$ واستعمل النظرية vi من الفصل ٢٢ .

٢١- استنتج من المسألة ٢٠ أنه إذا كانت $g(A)$ غير شاذة فإنه يمكن كتابة $[g(A)]^{-1}$ بكثير حدود في A من درجة تقل عن درجة $m(\lambda)$.

٢٢- برهن أنه إذا كان كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A المعروف على F غير قابل للاختزال على $F[\lambda]$ وإذا كان من الدرجة s في λ فإن مجموعة كل كثيرات الحدود العددية في A والتي تأخذ معاملات من F وتكون درجتها أصغر من s تشكل حقلاً .

٢٣- لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين ولنرمز بـ $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ على الترتيب لكثيري الحدود الأدنى لـ AB و BA برهن :

(أ) أن $m(\lambda) = n(\lambda)$ عندما لا تكون كل من A و B شاذتين .

(ب) أن $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ مختلفان عن بعضهما بما لا يزيد عن عامل λ وذلك عندما تكون المصفوفتان A و B شاذتين معاً .

إرشاد : $B \cdot m(AB) \cdot A = (BA) \cdot m(BA) = 0$ و $A \cdot n(BA) \cdot B = (AB) \cdot n(AB) = 0$.

٢٤- لنفرض أن بعد المصفوفة A يساوي $m \times n$ وأن المصفوفة B من السمة $n \times m$ حيث $n < m$ ولنرمز بـ $\phi(\lambda)$ و $\psi(\lambda)$ على الترتيب لكثيري الحدود المميزتين لـ AB و BA برهن أن $\phi(\lambda) = \lambda^{m-n} \psi(\lambda)$.

٢٥- لنفرض أن X_i متجهه لا متغير مصاحب لقيمة خاصة بسيطة لـ A . برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين فإن X_i يكون متجه لا متغير لـ B .

٢٦- إذا كانت المصفوفتان A و B تبديليتين فأوجد نظرية تتعلق بالمتجهات اللامتغيرة لـ B عندما لا يكون لـ A إلا قيم خاصة بسيطة.

الفصل السادس والعشرون

الشكل القانوني بالنسبة للتشابه

المسألة : لقد رأينا في الفصل ٢٥ أن المصفوفتين المميزتين للمصفوفتين المربعيتين من الدرجة n والمتشابهتين A و AR^{-1} على F يكون لها العوامل اللامتغيرة نفسها والقواسم الأولية ذاتها . سنوجد في هذا الفصل ، مثلين لمجموعة كل المصفوفات AR^{-1} التي (i) تتصف بكونها ذات تكوين بسيط (ii) تضع في الاعتبار إما عواملها اللامتغيرة أو قواسمها الأولية . تسمى هذه المصفوفات التي عددها أربع ، الأشكال القانونية لـ A وهي تناظر المصفوفة القانونية

$$N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والتي رأيناها سابقاً عند دراسة تكافؤ المصفوفات ذات البعد $m \times n$ والرتبة r .

الصيغ القانونية القياسية (الجبرية) :

لنفرض أن A مصفوفة على F مربعة من الدرجة n ولنفرض أولاً ، أن لمصفوفتها المميزة عاملاً واحداً فقط لا متغيراً غير تافه $f_n(\lambda)$ إن المصفوفة الرقيقة $C(f_n)$ لـ $f_n(\lambda)$ كما رأينا في الفصل ٢٥ مشابهة لـ A نقول عن هذه المصفوفات إنها الشكل القانوني الجذري S لكل المصفوفات المشابهة لـ A .

لنفرض بعد ذلك أن شكل سميث النظامي لـ $A - \lambda I$ هو :

$$\text{diag}(1, 1, \dots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \dots, f_n(\lambda)) \quad (26.1)$$

وله العامل اللامتغير غير التافه $f_i(\lambda)$ من الدرجة s_i حيث $(i = j, j+1, \dots, n)$ نعرف الشكل القانوني الجذري (القياس) لكل المصفوفات المشابهة لـ A بأنه

$$S = \text{diag}(C(f_j), C(f_{j+1}), \dots, C(f_n)) \quad (26.2)$$

لكي نبرهن أن A و S هما اللامتغيرات التشابهية ذاتها نلاحظ أن $C(f_i)$ مشابه لـ $D_i = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, f_i(\lambda))$ وينتج عن ذلك أن S مشابه لـ $\text{diag}(D_j, D_{j+1}, \dots, D_n)$. وبعد متوالية من المبادلات بين صفين وبين العمودين المقابلين لها نجد أن S مشابهة لـ

$$\text{diag}(1, 1, \dots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$$

وتكون بذلك قد برهننا على ما يلي :

I أن كل مصفوفة مربعة A تكون مشابهة للمجموع المباشر (26.2) للمصفوفات الرقيقة للعوامل اللامتغيرة غير التافهة لـ $A - \lambda I$ لنفرض أن اللامتغيرات التشابهية غير التافهة لـ A على حقل الأعداد الجبرية هي :

مثال ١ :

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, \quad f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1, \quad f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1$$

فيكون عددها :
$$C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C(f_{\theta}) = [-1]$, $C(f_{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

و

$$S = \text{diag}(C(f_{\theta}), C(f_{\theta}), C(f_{10})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث S هو الشكل المطلوب في النظرية I .

لنلاحظ أنه ليس للترتيب الذي تقع بموجبه المصفوفات الرفيعة على القطر أهمية تذكر . وهكذا فإن المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون صيغة أخرى استعملنا فيها منقول كل مصفوفة رفيعة من المصفوفات الواردة أعلاه .

شكل قانوني ثلث :

لنفرض أن المصفوفة المميزة لـ A يكون لها كموامل لا متغيرة وغير تافهة ، كثيرات الحدود $f_i(\lambda)$ الواردة في (26.1) . ولنفرض أيضا أن القواسم الأولية هي قوى t من كثيرات الحدود المتباينة وغير قابلة للاختزال في $F[\lambda]: p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_t(\lambda)$. ولنفرض أن :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}} \dots \{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}}, \quad (i = j, j+1, \dots, n) \quad (26.3)$$

حيث ليس من الضروري أن تظهر كل العوامل لأنه من الممكن أن تكون بعض الـ q 's أصفاراً . إن المصفوفة الرفيعة $C(p_k^{q_{ki}})$ لأي عامل يكون لها $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$ كلا متغير تشابهي وحيد ينتج عن هذا أن $C(f_i)$ متشابهة لـ

$$\text{diag}(C(p_1^{q_{1i}}), C(p_2^{q_{2i}}), \dots, C(p_t^{q_{ti}}))$$

II أن كل مصفوفة مربعة A على F مشابهة للمجموع المباشر للمصفوفات الرفيعة للقواسم الأولية على $\lambda I - A \cup F$.

إن القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية ، للمصفوفة A الواردة في المثال ١ هي :

$\lambda + 1, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2, \lambda^2 - \lambda + 1, (\lambda^2 - \lambda + 1)^2,$ إن المصفوفات الـرفيفة لهذه القواسم هي على الترتيب :

$$[-1], \quad [-1], \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

والشكل القانوني الوارد في النظرية II هو :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

لتكن A المصفوفة الواردة في البند السابق حيث تعتبر القواسم الأولية لمصفوفها المميزة ، قوى لكثيرات الحدود غير القابلة للاختزال على $F[\lambda]$ اعتبر قاسما أوليا $\{p(\lambda)\}^q$ إذا كان $q=1$ فإننا نسمي المصفوفة الرقيقة $C(p)$ وإذا كان $q > 1$ فلنشكل :

$$C_{q(p)} = \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p) \end{bmatrix} \quad (26.4)$$

حيث M مصفوفة من درجة ماثلة لدرجة $C(p)$ وقبل الواحد عنصرا في زاويتها اليسرى السفلى بينما تكون بقية عناصرها أصفارا. إن المصفوفة $Cq(p)$ الواردة في (26.4) مع العلم أن $C_1(p) = C(p)$ تدعى المصفوفة فوق الرفيقة لـ $\{p(\lambda)\}$ لنذكر أنه يوجد في (26.4) خط متصل تساوى عناصره الواحد واقع فوق القطر مباشرة.

عندما نستعمل المصفوفة الريفيقة البديلة $C'(p)$ فإن المصفوفة تفوق الريفيقة $L(p(\lambda))$ تكون

$$C_{q(p)} = \begin{bmatrix} C'(p) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N & C'(p) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N & C'(p) & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & C'(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & C'(p) \end{bmatrix}$$

مثال ۳ :

لیکن $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^4$ فیکون $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ،

$$C_{q(p)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

III تكون كل مصفوفة A على F مشابهة للمجموع المباشر للمصفوفات فوق الرقيقة للقواسم الأولية على $I - A \in F$.

مثال ۴ :

في المثال ٢ هي مصفوفاتها الرقيقة نفسها وإن المصفوفة فوق الرقيقة $L(\lambda + I)^2$ هي $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ والمصفوفة فوق

الرفيقة ٢ $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$ هي $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ وينتج عما تقدم أن الشكل القانوني الوارد في النظرية III هو :

[illegible]

إن استعمال كلمة « جذرية » في النظرية I قد يؤدي إلى شيء من الالتباس .

لقد استعملت هذه الكلمة في الأصل للدلالة على أنه للحصول على الشكل القانوني ، نستعمل عمليات جذرية فقط على الحقل الذي تنتمي إليه عناصر A . إن هذا الأمر طبيعا صحيح أيضا للأشكال القانونية (الواردة فيما بعد) في النظريتين II و III ويضاف التباس آخر إلى ما سبق بسبب تسمية الشكل القانوني الوارد في النظرية III ، في بعض الأحيان ، شكلا قانونيا جذريا .

الشكل القانوني الكلاسيكي :

لنفرض أن القواسم الأولية للمصفوفة المميزة لـ A هي قوى لكثيرات حدود خطية . إن الشكل القانوني للنظرية III هو إذن ، المجموع المباشر للمصفوفات فوق الرقيقة للشكل .

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i \end{bmatrix} \quad (26.5)$$

المنظر للقاسم الأولي $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$. كثال على ذلك أنظر المسألة ٢ .

تدعى هذه الحالة الخاصة من الشكل القانوني الوارد في النظرية III شكل جوردان القانوني أو الشكل القانوني الكلاسيكي [لاحظ أن $Cq(p)$ الوارد في (26.5) هو من النوع J الوارد في (25.4)] ينتج عما سبق :

IV . لنرمز بـ \mathcal{J} للحقل الذي يمكن فيه لكثير الحدود المميز للمصفوفة A أن يتحلل إلى كثيرات حدود خطية . فتكون عندها ، المصفوفة A مشابهة على \mathcal{J} إلى المجموع المباشر للمصفوفات فوق الرقيقة للشكل (26.5) يناظر كل مصفوفة قاسم أولي $(\lambda - a_i)^q$

مثال ٥ :

لنفرض أن القواسم الأولية على حقل الأعداد المركبة لـ $\lambda I - A$ هي $\lambda - i, \lambda + i, (\lambda - i)^2, (\lambda + i)^2$:

إن الشكل القانوني الكلاسيكي لـ A هو :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نستنتج من النظرية IV ما يلي :

V . تكون مصفوفة مربعة A من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كانت (وإذا كانت فقط) القواسم الأولية لـ $\lambda I - A$ كثيرات حدود خطية وهذا يعني أنه إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى لـ A هو حاصل ضرب كثيرات حدود خطية متباينة .

أنظر المسائل ٢ - ٤ .

اختزال الى الشكل القانونى الجذرى :

استنتاجا من المناقشات التى أوردناها فيما يتعلق بالأشكال القانونية ، سنبرهن أنه يمكن اختزال أى مصفوفة مربعة من الدرجة n إلى شكلها القانونى الجذرى بصورة نظرية على الأقل ، وذلك دون المعرفة المسبقة للعوامل المتغيرة لـ $I - A$.
توجد طريقة تختلف قليلا عما نوردته فى كتاب عنوانه *Modern Algebraic Theories*, Benj. H. Sanborn, 1926 .
ولقد تطور هذا الموضوع بشكل حسابى بحث فى *Browne, E. T., American Mathematical Monthly*, vol. 48 (1940).

سنحتاج فيما بعد لتعاريف التالية :

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان X متجهها معرفا على F عدد مركباته n ، وإذا كان $g(\lambda)$ كثير الحدود الواحدى فى $[\lambda]$ F ذات الدرجة الأدنى بحيث يكون $g(A) \cdot X = 0$ فإننا نقول بالنسبة لـ A إن المتجه X ينتمى لـ $g(\lambda)$

إذا كان بالنسبة لـ A لمتجه X ينتمى لـ $g(\lambda)$ ذات الدرجة p فإن المتجهات المستقلة خطيا $X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X$ تدعى السلسلة التى حدها القائد هو X .

مثال ٦ :

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ أن المتجهين $X = [1, 0, 0]^T$ و $AX = [2, 1, 1]^T$ مستقلان خطيا بينما $A^2X = X$ ، فيكون

عندئذ $(A^2 - I)X = 0$ ويكون المتجه X منتبها لكثير الحدود $\lambda^2 - 1$. إذا كانت $Y = [1, 0, -1]^T$ نجد أن $AY = [-1, 0, 1]^T = -Y$ وعلى ذلك $(A + I)Y = 0$ فيكون Y منتبها لكثير الحدود $\lambda + 1$.

إذا كان $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لمصفوفة A مربعة من الدرجة n فإنه يكون $m(A) \cdot X = 0$ لكل متجه X عدد مركباته n إذن لا يمكن أن توجد سلسلة لايزيد طولها عن درجة $m(\lambda)$. إن كثير الحدود الأدنى للمصفوفة الواردة فى المثال ٦ هو $\lambda^2 - 1$.

لتكن S الشكل القانونى الجذرى للمصفوفة A المربعة وذات الدرجة n على F يوجد عندئذ مصفوفة غير شاذة R على F بحيث يكون :

$$R^{-1}AR = S = R \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \quad (26.6)$$

حيث لتلائم أفضل ، يستعاض فى (26.2) عن C_i بـ $C(f_i)$ سنفرض أن C_i المصفوفة الرفيقة للعامل اللامتغير :

$$f_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + c_{i, s_i} \lambda^{s_i-1} + \dots + c_{i, 2} \lambda + c_{i, 1}$$

لها الشكل :

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i, 1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i, 2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_{i, 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{i, s_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{i, s_i} \end{bmatrix}$$

من العلاقة (26.6) نستنتج ما يلى :

$$R^{-1}AR = S = \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \quad (26.7)$$

لنفرض أن R قد فصلت إلى كتل من الأعمدة R_j, R_{j+1}, \dots, R_n بحيث تحوى R_i و C_i حيث $(i = j, j+1, \dots, n)$ العدد نفسه من الأعمدة . نستنتج من العلاقة (26.7)

$$\begin{aligned} AR &= A[R_j, R_{j+1}, \dots, R_n] = [R_j, R_{j+1}, \dots, R_n] \text{diag}(C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= [R_j C_j, R_{j+1} C_{j+1}, \dots, R_n C_n] \end{aligned}$$

$$AR_i = R_i C_i, \quad (i = j, j+1, \dots, n)$$

نرمز لمتجهات أعمدة R_i التى عددها s_i بالشكل $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}$ وكون حاصل الضرب :

$$R_i C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}] C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}, - \sum_{k=1}^{s_i} R_{ik} c_{ik}]$$

بما أن

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{is_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \dots, AR_{is_i}] = R_i C_i$$

فإننا نجد :

$$R_{i2} = AR_{i1}, \quad R_{i3} = AR_{i2} = A^2 R_{i1}, \quad \dots, \quad R_{is_i} = A^{s_i-1} R_{i1} \quad (26.8)$$

و

$$- \sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} R_{ik} = AR_{is_i} \quad (26.9)$$

بالتعويض من (26.8) وفى (26.9) نجد :

$$- \sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} A^{k-1} R_{i1} = A^{s_i} R_{i1}$$

أو

$$(A^{s_i} + c_{is_i} A^{s_i-1} + \dots + c_{i2} A + c_{i1} I) R_{i1} = 0 \quad (26.10)$$

من تعريف C_i الوارد أعلاه ، يمكننا كتابة (26.10) بالشكل :

$$f_i(A) \cdot R_{i1} = 0 \quad (26.11)$$

لنرمز لـ R_{i1} بالرمز X_i بحيث تأخذ العلاقة (26.11) الشكل $f_i(A) \cdot X_i = 0$ بما أن المتجهات $X_i, AX_i, \dots, A^{s_i-1} X_i$ مستقلة خطياً فإن المتجه X_i ينتمى للعامل اللامتغير $f_i(\lambda)$. ينتج عما تقدم أن متجهات أعمدة R_i تتكون

من متجهات السلسلة التى يكون فيها X_i الذى ينتمى إلى $f_i(\lambda)$ كحد قائد .

بالاختصار : إن أعمدة R التى عددها n والمستقلة خطياً والتى تحقق العلاقة (26-2) تتكون من $n-j+1$ سلسلة :

$$X_i, AX_i, \dots, A^{s_i-1} X_i \quad (i = j, j+1, \dots, n)$$

حيث الحدود القائمة تنتمى على الترتيب إلى العوامل اللامتغيرة $f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ وحيث تحقق أطولها الشرط

$$0 < s_j \leq s_{j+1} \leq \dots \leq s_n$$

ونجد بعد ما تقدم :

VI. لمصفوفة مربعة A درجتها n ومعرفة على F .

(i) ليكن X_n قائداً لسلسلة C_n ذات طول أقصى لكل المتجهات ذات الـ n مركبة على F .

(ii) ليكن X_{n-1} قائداً لسلسلة E_{n-1} ذات الطول الأقصى (كل عنصر فيها مستقل خطياً مع العناصر التي سبقتة ومع عناصر E_n) لجميع المتجهات ذات الـ n مركبة على F والتي هي مستقلة خطياً مع متجهات E_n .
 (iii) ليكن X_{n-2} قائداً لسلسلة E_{n-2} ذات الطول الأقصى (كل عنصر فيها مستقل خطياً مع العناصر التي سبقتة ومع عناصر E_{n-1} و E_n) لجميع المتجهات ذات الـ n على F والتي هي مستقلة خطياً مع متجهات E_{n-1} و E_n .
 وهكذا . . .

فيكون بهذا ، من أجل :

$$R = [X_j, AX_j, \dots, A^{S_j-1}X_j; X_{j+1}, AX_{j+1}, \dots, A^{S_{j+1}-1}X_{j+1}; \dots; X_n, AX_n, \dots, A^{S_n-1}X_n]$$

$R^{-1}AR$ هو الشكل القانوني الجذري لـ A .

مثال ٧ :

لنفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ولنأخذ $X = [1, 0, 0]^T$ فتكون المتجهات $X, AX = [1, 1, 1]^T, A^2X = [3, 5, 6]^T$ مستقلة خطياً بينما $A^3X = [14, 25, 30]^T = 5A^2X - X$. وينتج عما تقدم أن $(A^3 - 5A^2 + I)X = 0$ وأن X ينتمي إلى $f_3(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 1 = \phi(\lambda)$. لنأخذ :

$$R = [X, AX, A^2X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

فنجد :

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AR = [AX, A^2X, A^3X] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 30 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = S$$

إن A هنا غير متردية كثير حدودها الأدنى $m(\lambda)$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الجذرية . كل متجه ذي ثلاث مركبات على هذا الحقل ينتمي إلى $m(\lambda)$ (انظر المسألة ١١) ويقود سلسلة طولها ثلاثة . إن المصفوفة R التي تكون فيها متجهات أي سلسلة لمتجهات أعمدة تحقق العلاقة $R^{-1}AR = S$.

مثال ٨ :

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ولنأخذ $X = [1, -1, 0]^T$ فيكون $AX = X$ و X ينتمي إلى $\lambda - 1$ والآن $\lambda - 1$ لا يمكنه أن يكون كثير حدود أدنى $m(\lambda)$ لـ A ولكنه مع ذلك ، قاسم لـ $m(\lambda)$ (انظر المسألة ١١) ويمكنه أن يكون لا متغيراً تشابهاً لـ A .

لنأخذ الآن $Y = [1, 0, 0]^T$ فتكون المتجهات $Y, AY = [2, 1, 2]^T, A^2Y = [11, 8, 8]^T$ مستقلة خطياً بينما $A^3Y = [54, 43, 46]^T = 5A^2Y + 3AY - 7Y$. إذن Y ينتمي إلى $m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7 = \phi(\lambda)$.

إن كثير الحدود $\lambda - 1$ ليس لامتنيراً تشاهياً . في الواقع ، إذا لم يكن الاختيار الأول لمتجه ينتمي لكثير الحدود الذي يمكننا أن نسميه بحق ، الدالة الصغرى ، فإن هذا الاختيار يكون زائفاً .

ويمكن للقارئ أن يتحقق من أن :

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = [Y, AY, A^2Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

عندما يكون

أنظر المسألين ٥ - ٦

مسائل محلولة

١ - برهن أن المصفوفة $C_q(p)$ الواردة في (26.4) يكون لها $\{p(\lambda)\}^q$ كلا متغير تشاهي غير تافه وحيد .

لنفرض أن $C_q(p)$ من الدرجة s . إن مصغر العنصر الواقع في الصف الأخير والعمود الأول من $\lambda I - C_q(p)$ هو ± 1 وهذا يكون القاسم المشترك الأعظم لكل المصفورات المربعة من الدرجة $(s-1)$ لـ $\lambda I - C_q(p)$ هو الواحد ، أي أن العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - C_q(p)$ هي $1, 1, \dots, 1, f_s(\lambda)$ ولكن $f_s(\lambda) = \{p(\lambda)\}^q$ وذلك لأن :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - C_q(p)| = |\lambda I - C(p)|^q = \{p(\lambda)\}^q$$

٢ - إن الشكل القانوني (١) هو الشكل الوارد في النظريتين I و II وإن العامل اللامتغير وغير التافه والقاسم الأول هو $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$. إن الشكل القانوني الوارد في النظرية III هو (ب) :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad (١)$$

٣ - إن الشكل القانوني (١) هو الشكل الوارد في النظرية I حيث العوامل اللامتغيرة هي $\lambda + 2, \lambda^2 - 4, \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12$ والقواسم الأولية هي $\lambda + 2, \lambda + 2, \lambda + 2, \lambda - 2, \lambda - 2, \lambda + 3$. إن الشكل القانوني المتعلق بالنظريتين II و III هو (ب) :

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad (١)$$

٤ - إن الشكل القانوني (١) هو الشكل المتعلق بالنظرية III . إن القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية هي :

$$\lambda + 2, \lambda + 2, (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2, (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^3$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2, \quad (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^3$$

إن الشكل القانوني الوارد في النظرية I هو (ب) أما الشكل الوارد في النظرية II فهو (جـ)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 12 & 17 & -14 & -21 & -8 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 & -9 & -6 \end{bmatrix} \quad (جـ)$$

ولنأخذ $X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]'$

و

$A =$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

هـ - لنفرض أن

فتكون عندها : $A^3 X = [-3, 1, 1, 1, 1, 2]$ $A^2 X = [1, 0, -1, 0, 0, -1]'$ $X, AX = [-2, 1, 1, 1, 1, 1]'$

متجهات مستقلة خطيا بيانا $A^4 X = [1, 0, -2, 0, 0, -2]'$ $= 2A^2 X - X$ أن X ينتمي إلى $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ لنجرب

$m(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ ولنكتب X_6 بدلا من X

إن المتجه $Y = [0, 0, 0, 1, 0, 0]^T$ مستقل خطيا مع عناصر السلسلة المقادة بـ X_6 وأن $AY = [-1, 0, 1, -1, 1, 0]^T$ مستقل خطيا مع Y ومع عناصر هذه السلسلة . والآن $A^2Y = Y$ أى أن Y ينتمى إلى $\lambda^2 - 1$. بما أن كثيرى الحدود هذين يتجان مجموعة العوامل اللامتغيرة وغير التافهة : فإننا نكتب X_5 بدلا عن Y

ونجد الشكل القانونى الجذرى لـ A :

$$R = [X_5, AX_5, X_6, AX_6, A^2X_6, A^3X_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إن المتجه $Z = [0, 1, 0, 0, 0, 0]^T$ مستقل خطيا مع عناصر السلسلة المقادة بـ X_6 وأن $AZ = [3, 0, -2, 1, -2, 0]^T$ مستقل خطيا مع Z ومع عناصر السلسلة ، من جهة ثانية : أن $A^2Z = [-1, 1, 0, 0, 0, 1]^T = -AX_6 + A^3X_6 + Z$;

وهكذا يكون $(A^2 - 1)(Z - AX_6) = 0$ ويكون $W = Z - AX_6 = [2, 0, -1, -1, -1, -1]^T$ متبنيان إلى $\lambda^2 - 1$. إذا اتخذنا هذا المتجه كـ X_5 فإنه يمكننا أن نكون مصفوفة أخرى R نحصل بواسطتها على الشكل القانونى الجذرى .

$$X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \text{ ولتأخذ } A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{٦- ليكن}$$

ينتج عما تقدم أن ، $A^2X = [1, 1, -1, -1, 0]^T$ ، $AX = [-2, 1, -1, -1, -2]^T$ ، مستقلة خطيا بينما $A^3X = [-1, 2, -2, -2, 0]^T = 2A^2X - 3X$ وأن X ينتمى إلى $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$ لنجرب كثير الحدود هذا ككثير حدود أدنى $m(\lambda)$ ولتأخذ X كـ X_5 .

عندما نطرح في A العمود الرابع من العمود الأول فإننا نجد $[-1, 0, 0, 1, 0]^T$ وإذا أخذنا بعد ما تقدم $Y = [1, 0, 0, -1, 0]^T$ فإنه يكون $AY = -Y$ ويكون Y متبنيًا إلى $\lambda + 1$. وإذا طرحنا من جديد العمود الرابع في A من عمودها الثالث فإننا نجد $[0, 0, -1, 1, 0]^T$ وإذا اتخذنا بعد ما تقدم $Z = [0, 0, 1, -1, 0]^T$ فإن $AZ = -Z$ وأن Z ينتمى إلى $\lambda + 1$. بما أن Y و Z وعناصر السلسلة المقادة بـ X_3 تكون مستقلة خطيا فإننا نسمي Y كـ X_4 و Z كـ X_3 ونجد بعدها الشكل القانونى العادى لـ A

$$R = [X_3, X_4, X_5, AX_5, A^2X_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مسائل اضافية

٧- اكتب المصفوفات القانونية الواردة في النظريات I و II و III على حقل الأعداد الجذرية لكل مصفوفة من مصفوفات المسألة ٩ من الفصل ٢٥ :

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{II, III, } \text{diag}(1, 2, 3) \quad (أ)$$

$$\text{I, II, III, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{II, III, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{II, III, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{II, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{III, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$\text{I. } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{II, III, } \text{diag}(2, 2, 2, -1, -1) \quad (و)$$

٨- ما هي الشروط الواجب توافرها (أ) لكي يكون الشكلان القانونيان المتعلقان بالنظريتين I و II متطابقتين؟
(ب) ولكي يكون الشكلان القانونيان الواردان في النظريتين II و III متطابقتين؟ (ج) لكي يكون الشكل القانوني المتعلق بالنظرية II قطريا؟

$$٩ - \text{حقق الشكل القانوني } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ وفارنه مع جواب (ب) من المسألة ٨.}$$

١٠ - لنفرض أن للمصفوفة A غير الشاذة العوامل اللامتغيرة وغير النافهة .

$$(أ) \lambda^2 + 1, (ب) \lambda^3 + 1, (ج) \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4, (د) \lambda^5 + 6\lambda^4 + 9\lambda^2 + 4.$$

اكتب لكل من هاتين الحالتين ، الأشكال القانونية الواردة في النظريات I و II و III على حقل الأعداد الجذرية ومن ثم الشكل المتعلق بالنظرية IV .

جواب (١)

$$I. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$II. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$III. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$IV. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

حيث $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$

١١- برهن أنه لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ، إذا كان المتجه X متتميا إلى $g(\lambda)$ فإن $g(\lambda)$ تقسم $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لـ A

إرشاد : افرض العكس واعتبر $m(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$.

١٢ - برهن في المثال ٦ أن X ، AX ، Y مستقلة خطيا واختزل A إلى شكلها القانوني الجذري .

١٣ - في المسألة ٦ :

(أ) خذ $Y = [0, 1, 0, 0, 0]'$ المستقل خطيا مع السلسلة المقادة بـ X_5 واستنتج أن $X_4 = Y - (3A - 2I)X_5$ منتم إلى $\lambda + 1$

(ب) خذ $Z = [0, 0, 1, 0, 0]'$ المستقل خطيا مع X_4 ومع السلسلة المقادة بـ X_5 واستنتج أن $X_3 = Z - X_5$ منتم إلى $\lambda + 1$

(ج) احسب $R^{-1}AR$ مستعملا المتجهين X_3 و X_4 من (ب) و (أ) لتكوين R .

١٤ - أوجد R لكل مصفوفة A من مصفوفات المسألة ٩ الفصل ٢٥ شرط أن تكون $R^{-1}AR$ الشكل القانوني الجذري لـ A

١٥ - حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية التالية :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

حيث x_i دوال مجهولة للمتغير الحقيقي t

إرشاد : افرض $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ وعرف $\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \frac{dx_4}{dt} \right]'$

ومن ثم أعد كتابة المجموعة بالشكل التالي :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AX + H \quad (i)$$

بما أن التحويل الخطي غير الشاذ $X = RY$ يحول (i) إلى :

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

فاختبر R بحيث تكون $R^{-1}AR$ هي الشكل القانوني الجذري لـ A . إن المنهج الأول E_1 ذا المركبات الأربعة المنتمى

إلى $\lambda - \lambda^3$ هو القائد للسلسلة $X_1 = E_1, AX_1, A^2X_1, A^3X_1$ يعطى $X_2 = E_4 - X_1 + 2AX_1$ الذي ينتمى إلى $\lambda + 1$ والآن باعتبار :

$$R = [X_1, AX_1, A^2X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \\ -y_4 \end{bmatrix}$$

نجد

ويكون :

$$X = RY = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2e^t + 3(C_3+C_4)e^{-t} + t^2 - 2t + 1 \\ 2C_1 + 2C_2e^t + 2(3C_3+4C_4)e^{-t} + t^2 - 4t + 2 \\ -4C_1 - 2C_2e^t - 2(5C_3+6C_4)e^{-t} - 2t^2 + 6t - 4 \\ -2C_1 - C_2e^t - 5(C_3+C_4)e^{-t} - t^2 + 3t - 2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} C_1 + \frac{1}{2}t^2 \\ C_2e^t + C_3e^{-t} - t \\ -C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ C_4e^{-t} \end{bmatrix}$$

GLOSSARY

Ch. 1

Matri
Coefficient matrix
Augmented
Elements
Trace
Conformable
Order of a matrix
Commutative law
Scalar
Associative law
Partitioning

Ch. 2

Types
Identity matrix
Triangular
Diagonal matrix
Commulative
Idempotent
Nilpotent
Index
Involutory
Transpose
Symmetric
Skew
Conjugate
Hermitian matrix
Diroect sum

Ch. 3

Determinant
Permutations
Inver and ion
Odd
even

قائمة بالمصطلحات

الفصل الأول

مصفوفة
مصفوفة المعاملات
ممددة
عناصر
أثر
متوافقة
درجة مصفوفة
قانون التبديل
عددي
قانون جمع الحدود الجبرية - قانون ترتيب الحدود
تجزئة

الفصل الثاني

أنماط - أنواع
مصفوفة الوحدة
مثلثي
مصفوفة قطرية
تبديلية
متساوية القوى
معدومة القوى
دليل
ملتفة
منقول
متماثل
تخالفي - متخالف
مرافق
مصفوفة هيرميتية
المجموع المباشر

الفصل الثالث

محددة
تباديل
تماكسن
فردى
زوجى

Terms	حدود
Minor	مصغر
Cofactor	معامل مرافق
Algebraic complements	المتكمات الجبرية
Complementary minors	المصغرات المتكمة
Ch. 4	الفصل الرابع
Evaluation of determinants	حسابات المحددات
Expansion	مفكوك
Expansion along a row	انفك على طول صف
Derivative	مشتقة
Ch. 5	الفصل الخامس
Equivalence	تكافؤ
Rank of a matrix	رتبة مصفوفة
Singular	شاذ
Non - singular	غير شاذ
Elementary transformations	التحويلات الأولية
Elementary row transformations	تحويلات صفوف أولية
Elementary column transformations	تحويلات أعمدة أولية
Inverse	معكوس
Equivalent matrices	المصفوفات المتكافئة
Row equivalence	التكافؤ بالصفوف
Canonical matrix	مصفوفة قانونية
Normal form	الشكل العادي - الصيغة النظامية
Elementary matrices	مصفوفات أولية
Ch. 6	الفصل السادس
Adjoint matrix	المصفوفة المرافقة
Ch. 7	الفصل السابع
Inverse of a symmetric matrix	معكوس مصفوفة متماثلة
Ch. 8	الفصل الثامن
Fields	حقول - مجالات
Of characteristic	ذو مميز
Subfield	حقول جزئي
Ch. 9	الفصل التاسع
Linear dependence	الارتباط الخطي
Linear independence	الاستقلال الخطي
Forms	صيغ - أشكال
Vectors	متجهات
Components	مركبات

Zero vector	متجه صفري
Linear combination	اثنلاف خطي
Linear form	صيغة خطية
Ch. 10	الفصل العاشر
Consistent	متسقة (غير متعارضة)
Inconsistent	غير متسقة - متعارضة
Homogeneous	متجانس
Trivial solution	حل تافه - حل غير هام
Ch. 11	الفصل الحادى عشر
Vector spaces	الفرافات الاتجاهية
Closed under	مغلقة بالنسبة
Dimension	بمد
Spanned by	مولد بـ
Subspace	فراغ جزئى
Basis	أساس
Intersection	تقاطع
Nullity of a matrix	صفريّة مصفوفة
Coordinates	احداثيات
Ch. 12	الفصل الثانى عشر
Ch. 13	الفصل الثالث عشر
Inner product	حاصل الضرب الداخلى
Orthogonal vectors	المتجهات المتعامدة
Unit vector	متجه الوحدة
Normalization	التعبير
Orthonormal	عيارى متعامد
Ch. 14	الفصل الرابع عشر
Ortho - normal	عيارى متعامد
Unitary transformation	التحول الواحدى
Ch. 15	الفصل الخامس عشر
Congruence	تطابق
Congruent	متطابقة
Index of the matrix	دليل المصفوفة
Signature of the matrix	شارة المصفوفة
Rank	رتبة
Skew - symmetric	مماثلة تحالفية
Conjunctive	مقترن (موحد)
Conjugate	مرافق

Ch. 16

Bilinear Forme
Rank of the matrix
Canonical forms
Alternative
Cogredient
Contragredient
Factorable
Rational field
Minor
Reciprocal

الفصل السادس عشر

الصيغ ثنائية الخطية
رتبة المصفوفة
الصيغ القانونية
متناوب
الموافقة التغير
مخالف التغير
قابل للتحليل لعوامل
حقول الأعداد الجذرية
مصنر
عكسي

Ch. 17

Quadratic form
Cross terms
Equivalent
Invariant
Congruent
(Law) of inertia
Definite form
Semi - definite form
Minors
Leading minors
Regular
Reduction
Distinct
Permanence
Variation

الفصل السابع عشر

صيغة تربيعية (شكل تربيعي)
حدود تقاطعية
متكافئة
لا متغير (ثابتة)
متطابقة
(قانون) القصور
صيغة محددة
صيغة شبه محددة
مصنرات
مصنرات المتقدمة
منتظم
اختزال
تميز (مختلف)
دوام أو ثبات
تغير

Ch. 18

الفصل الثامن عشر

Ch. 19

الفصل التاسع عشر

The characteristic equation
Invariant
Characteristic polynomial
Characteristic roots
Eigenvalues
Eigenvectors
Latent roots
Latent vectors

المعادلة المتميزة
لا متغير
كثير حدود متميز
الجنور المميزة (الجنور الخاصة)
قيم خاصة
متجهات خاصة
جنور كامنة
متجهات كامنة

Distinct	مختلفة - متميزة
Ch. 20	الفصل العشرون
Similarity	التشابه
Associated with	مصاحب لـ أو مرافق لـ
Multiplicity	تعدد
Dimension	بمد
Null	ممدوم
Orthogonally similar	متشابهتان تعامديا
Unitarily similar	متشابهتان واحديا
Nullity	انعدامية (صفرية)
Ch. 21	الفصل الواحد والعشرون
Symmetric matrices	مصفوفات متماثلة
Distinct	مختلفة (متميزة) - متباينة
Multiplicity	تعددية
Unitarily similar	ذات تشابه واحد
Normal	نظامي
Identity transformation	التحويل الذاتي (التحويل المحايد)
To normalize	جعله عياري
Augmented matrix	مصفوفة ممددة
Spectral decomposition	التحليل الطيفي
Ch. 22	الفصل الثاني والعشرون
Domain	نطاق أو مجال
Polynomial	كثير حدود
Leading coefficient	المعامل المتقدم
Monic	واحدى
Irreducible	غير قابل للاختزال
Rational	جذرى
Greatest common divisor	قاسم مشترك أعظم
Uniqueness	وحدانية
Ch. 23	الفصل الثالث والعشرون
Functional values	القيم الدالية
Matrix polynomials	كثيرات حدود مصفوفية
Right divisor	قاسم من اليمين
Left divisor	قاسم من اليسار
Proper	غير معتل
Improper	معتل
Ch. 24	الفصل الرابع والعشرون
Inverse	معكوس

Invariant	لا متغير
Distinct	متباينة
Monic	واحدى
Elementary divisor	قاسم أولى
Ch. 25	الفصل الخامس والعشرون
Similarity invariants	لامتغيرات تشابهية
Derogatory	متردية
Non-deogatory	غير متردية
Companion	رفيق (زميل)
Nilpotent	معدومة القوى
Idempotent	متساوية القوى
Dimension	بعد أو سعة
Ch. 26	الفصل السادس والعشرون
Rational canonical form	شكل قانونى جدرى
Chain	سلسلة
Leader	القائد
Ledy by	مقاد بـ

(أ)

١٤	لمصفوفة		
٤	تجزئة المصفوفات	٩٨	أحداثيات متجه
١٩٢	تحليل طيفي	٧٦	ارتباط خطي للمتجهات
٢١٣، ٤٨	تحليل لمصفوفات أولية		أساس
١٤٣	تحويلات غير موافقة التغير	١٠٧	تغير الـ
٢٢٣	تشابه لامتغير	١٢٣، ١١٤	عيارى متعامد
	تساوى الـ	٩٦	لفراغ اتجاهي
١٩٤	(عددي) كثيرى حدود		ارتباط
٢٠٢	كثيرى حدود مصفوفى	٧٧	صيغ
٢	مصفوفات تعامد	٨١	كثير حدود
١١٥	تحويل	٧٦	متجهات
١٨٣، ١٧٥	تشابه	٨١	مصفوفات
١٨٣	تطابق		ارتباط خطي (استقلال)
١٨٣	تكافؤ	٧٨	للصيغ
١٢٢، ١١٢	متجهات	٧٦	للمتجهات
١١٥	مصفوفة	٨٠	للمصفوفات
		١٢٢، ١٤	أعداد مركبة
			أولى

(ج)

	جذر	٤٤	تحويلات
٢٠١	كثير حدود	٩٨	متجهات
٢١١	كثير حدود مصفوفى عددي	٤٦	مصفوفات
١٦٦	جذور كامنة (متجهات)		
	جذور مميزة	٩٦	بعد فراغ اتجاهي
١٦٦	تعريف الـ		
١٧٣	لمجموع مباشر		
١٧٣	لمصفوفات حقيقية متعامدة	١٥	تحالفية
١٨٣	لمصفوفات حقيقية متماثلة	١٤	تحليل مصفوفة إلى أجزاء هيرميتية وهيرميتية
١٩١	لمصفوفات حقيقية متماثلة تخالفية		تحويل
١٨٤	لمصفوفات هيرميتية	٤٤	أولى
١٧٣	لمصفوفات واحدة	١٠٦	خطى
١٧٢	لمصفوفة قطرية	١٠٦	شاذ
١٧٣	لمعكوس مصفوفة	١١٥	متعامد
١٢٣، ١١٤	جرام - شमित عملية	١٢٤	واحدى
١٢٣، ١١٥	جراميان	١٤٧	تحويلات موافقة التغير
	جمع		ترافق
٧٥	المتجهات	١٤	لحاصل ضرب
٤٠٢	المصفوفات	١٤	لعدد مركب
٢٣٦	جوردان (كلاسيكى) صيغة قانونية	١٥	لمجموع

(ب)

(ت)

(ح)

حاصل ضرب مصفوفات

١٤٨	صيفة حقيقية تربيعية	٤٨
١٦٣	صيفة هير ميتية.	١٤
١٢٩	مصفوفة حقيقية متائلة	٣٧
١٣١	مصفوفة هير ميتية	٥٦
٢١٤	شكل سميت النظامى	١٣

(ص)

	صف	١١٢
٤٤	تحويل	٧٢
١٠٣	فراغ مصفوفة	١٩٣
٤٥	مصفوفات متكافئة	١٢٢، ١١٢
٩٨	صفيرية	

	صورة	
١٠٦	فراغ اتجاهى	١٩٤
١٠٥	متجب	٢٠٢
	صيف تربيعية	١
١٤٩، ١٤٦	تكافؤ الـ	

	صيفة تربيعية	١٤٨
	اختزال	١٦٤
١٥١	كرو نكر	

١٤٧	لاجرانج	
١٤٩، ١٤٨	صيفة قانونية لـ	

١٥٤	تحليل لعوامل	٤٨
١٤٦	تعريف	١٤٦
١٤٦	رتبة	١٤٠
١٥٠	منتظمة	١٦٣

	صيفة تربيعية حقيقية	٥٤
١٤٨	دليل	٥٦
١٤٨	شارة	٤٤

١٤٩	شبه محددة	
١٤٩	محددة	

	صيف ثنائية الخطية	١٦٤، ١٤٩
١٤١	اختزال الـ	١٦٤، ١٤٩

١٤٣	تحليل لعوامل	٢
١٤٠	تعريف الـ	٢٣٧

١٤١	تكافؤ	
١٤٠	رتبة الـ	٩٨
١٤٠	صيفة قانونية لـ	١٤٨

(ح)

حاصل ضرب مصفوفات

١٤٨	رتبة	٤٨
١٦٣	مترافق	١٤
١٢٩	محددة	٣٧
١٣١	مترافق	٥٦
٢١٤	معكوس	١٣

(د)

	منقول	١٣
	حاصل الضرب العددي	١١٢
	حقل	٧٢
	حقل ليم	١٩٣
	حاصل ضرب داخل	١٢٢، ١١٢

(د)

	درجة	
١٠٦	(عددي) كثير حدود	١٩٤
١٠٥	كثير حدود مصفوفى	٢٠٢
	درجة مصفوفة	١
١٤٩، ١٤٦	دليل	

	لصيفة حقيقية تربيعية	١٤٨
	لصيفة هير ميتية	١٦٤

(ر)

	رتبة	
	حاصل ضرب	٤٨
	صيفة تربيعية	١٤٦
	صيفة ثنائية الخطية	١٤٠
	صيفة هير ميتية	١٦٣
	مجموع	٥٤
	مترافق	٥٦
	مصفوفة	٤٤

١٤٨	دليل	٥٦
١٤٨	شارة	٤٤

(س)

١٤٩	شبه محددة	
١٤٩	محددة	

	صيفة شبه محددة (مصفوفة)	١٦٤، ١٤٩
	صيفة محددة (مصفوفة)	١٦٤، ١٤٩
	مصفوفة	٢

	سلسلة من المتجهات	٢٣٧
	سليفستر قانون	
	لصفيرية	٩٨
	للقصور	١٤٨

٩٦	بعد	٢٣٤	صيفة جاكوبيان القانونية
٩٥	تعريف		صيفة قانونية
١١٢	على حقل حقيقي	٤٥	تكافؤ صفر
١٢٢	على حقل مركب	٢٣٤	جاكوبون
٩٨	فراغ معدوم	٢٣٢	جذرية
	(ق)	٢٣٦	كلاسيكية (جوردان)
١٩٥	قاسم مشترك أعظم	١٤٨	لصيفة تربيعية
٢٠٣	قاسم من اليمين	١٤٠	لصيفة ثنائية الخطية
	قانون التبادل لـ	١٦٣	لصيفة هيرميتية
٢	جمع المصفوفات	٤٧٠ ٤٦	لمصفوفة
٧٢	حقول	٢٣٦	صيفة قانونية كلاسيكية
٣	ضرب المصفوفات		صيغ هيرميتية
	قانون التوزيع لـ	١٦٣	تكافؤ الـ
٧٢	حقول		صيفة هيرميتية
٤	مصفوفات	١٦٤	دليل الـ
	قانون ترتيب الحدود	١٦٣	رتبة الـ
٧٢	حقول	١٦٤	شارة الـ
٢	ضرب المصفوفات	١٦٤	شبه محددة
٢	لجمع المصفوفات	١٦٣	صيفة قانونية لـ
	قطر	١٦٤	محددة
١	عناصر مصفوفة مربعة	٤٦	صيفة نظامية لمصفوفة
١٧٤، ١٢	مصفوفة		(ض)
٢٢	قواسم الصفر		ضرب
١٨٠	قواسم من اليسار		المصفوفات
١٦٦	قيم خاصة	٣	بالتجزئة
١٢٢	قيمة مطلقة لعند مركب	٤	
	(ك)		(ع)
٢٠٥	كايلي - هاملتون نظرية		عددي
	كثير حدود	١٩٤	كثير حدود
١٩٤	عددي	٢٠٣	كثير حدود مصفوفي
٢٠٢	مصفوفة	١٣	مصفوفة
٢٠٣	مصفوفة عددية	٢	مضاعفات مصفوفة
١٩٤	نطاق	١١	علاقة تكافؤ
١٩٤	واحدى		عمود
٢٢٣	كثير حدود أدنى	٤٤	تحويل
	كثير حدود مصفوفي	١٠٣	فراغ مصفوفة
٢٠٢	تعريف		(ف)
٢٠٣	حاصل ضرب		فراغ اتجاهى :
٢٠٢	درجة	٩٦	أساس

	شاذ (غير شاذ)	٢٠٢	مجموعة قانونية
	عددي	٢٠٤	بالتطابق
١٣٠٠، ١٢٩	غير معتل (معتل)	٢٠٢	بالتكافؤ
٢١٤٠، ٤٨	مجموع	٢٠٢	بالتشابه
٢٣٣	كرامر ، قاعدة	٨٦	محددة
٢٣	كرونكر ، اختزال	١٥١	تعريف الـ
٣٨	(ل)		مشتقة الـ
	لابلاس ، مفكوك	٣٧	مفكوك الـ
	لاجرانج ، اختزال	١٤٧	بطريقة لابلاس
٢٧	(م)		من خلال الصف الأول والعمود
٣٧	متباينات شوارز	١٢٣، ١١٣	من خلال صف (عمود)
	متباينة مثلثية	١٢٣، ١١٣	الضرب بعدد قياسي
٢٥	متجه		لتحويل أولي لمصفوفة
٤٧	احداثيات	٩٨	لحاصل ضرب مصفوفات
٣٧	تعريف	٧٥	لمصفوفة شاذة
٤٤	حاصل الضرب الاتجاهي	١٢١	لمصفوفة مترافقة
٣٤	حاصل الضرب الداخلي	١١٢	لمنقول مترافق لمصفوفة
٣٤	طول	١٢٣، ١١٢	لمنقول مصفوفة
٢٤	لامتغير	١١٦	مصفرات متممة
٢٧	متعامد	١١٣	مصفر رئيسي
١٥٠	معير	١١٤	تعريف
١٥٠	متجهات خاصة	١٦٦	متقدم
	متجهات لامتغيرة		مصفوفات
	تعريف	١٦٦	حاصل ضرب
٣	لمصفوفات متشابهة	١٧٤	عل حقل
٧٣	لمصفوفة حقيقية متماثلة	١٨٣	مجموع
٢	لمصفوفة قطرية	١٧٤	مربعة
١	لمصفوفة نظامية	١٨٤	متساوية
٢	لمصفوفة هيرميتية	١٨٤	متشابهة
١٧٤، ١٠٧	متجه وحدة	١١٣	متطابقة
١٢٨	متكافئة		متكافئة
٤٥	صيع تربيعية	١٤٩، ١٤٦	مضاعفات بمقدار عددي
٢	صيع ثنائية الخطية	١٤١	مصفوفات تبادلية
١٣	صيع هيرميتية	١٦٣	مصفوفات تبادلية عكسية
١٣	مصفوفات	٢١٣، ٤٥	مصفوفات قابلة لأن تكون قطرية
١٧٥	متممة جبرية	٢٨	مصفوفات متشابهة
٢٢٣، ١٠٧	مجموع		مصفوفات متطابقة
١٢٨	فراغات اتجاهية	٩٧	مصفوفات متوافقة
	مصفوفات	٢	للمجموع
٢	مجموع مباشر	١٦	للضرب
٣			

٢٣٤	مصفوفة فوق المرافقة	١٣١	مصفوفات مقترنة
٢٠٢	مصفوفة لأمبدا		مصفوفة
٢٢٤	مصفوفة متردية	٤٤	تحويلات أولية لـ
١٣	مصفوفة متساوية القوى	١	تعريف
	مصفوفة متماثلة	١٣١٠ ١٤	تمثالية تحالفية
١٤	تعريف	١	درجة
١٨٣	جنور مميزة	١٣	دورية
١٨٣	متجهات لامتغيرة	٤٤	رتبة
١٧٥٠ ١٢	مصفوفة مثلثية	٤٤	شاذة
	مصفوفة مرافقة لمصفوفة مربعة	٤٧	صف (عمود) أولى
٥٥	تعريف	٩٨	صفريه الـ
٥٦	رتبة	١٤٠	صيغة ثنائية الخطية
٥٥	محددة	٤٦	صيغة نظامية لـ
٦٢	معكوس	١٢	عددية
٢٢٥	مصفوفة ريفية	٤٤	غير شاذة
١٣	مصفوفة معلومة القوى	٢٢٤	غير متردية
١٣	مصفوفة ملتفة	١٢	قطرية
٨٤	مصفوفة ممددة	٢٠٢	كثيرة حدود
١٨٤٠١٣١٠١٥	مصفوفة هيرميتية	٢٠٢	لا مبدأ
١٢	مصفوفة وحدة	١٤٦	لصيغة تريبية
	معادلات خطية	١٦٣	لصيغة هيرميتية
٨٣	حل	٢٢٤	متردية
٨٧	مجموعة متجانسة	١٣	متساوية القوى
٨٣	مجموعة متكافئة من	١٨٣٠١١٥	متعامدة
٨٥	مجموعة غير متجانسة	١٨٣٠١٢٨٠١٤	متماثلة
٢٦	معامل مرافق	١٧٥٠ ١٢	مثلثية
	معكوس	١٣	معدومة القوى
٤٤	تحويلات أولية	٦٢٠ ١٣	معكوس
١٣	حاصل ضرب المصفوفات	١٦٤٠١٤٩	موجبة محددة (شبه محددة)
٦٢	مجموع مباشر	١٨٤	نظامية
٦٢٠ ١٣	مصفوفة	١٨٤٠١٣١٠١٥	هيرميتية
٦٢	مصفوفة قطرية	١٣٢٠ ١٥	هيرميتية تحالفية
٦٥	مصفوفة متماثلة	١٨٤٠١٢٤	واحدية
٧١	معكوس من اليسار	٨٤	مصفوفة المعاملات
٧١	معكوس من اليمين	٢٧	مصفوفة جزئية
	مميزة	٤٤	مصفوفة شاذة
١٦٦	كثير حدود	٢٢٤	مصفوفة غير متردية

١٦٤	صيفة هير مينية	١٦٦	معادلة
١٦٤٠١٤٩	مصفوفة		منقول
	(ز)	١٤	حاصل ضرب
		١٤	مجموع
	واحدى	١٣	مصفوفة
١٢٤	تحويل	١٥	منقول مترافق
١٧٥	تشابه		موجبة محددة (شبه محددة)
١٢٤	مصفوفة	١٤٩	صيف تر يعية